نویسنده: عبدالرسول خان احمدی

منظور از محاسبه ی حد یک تابع (f(x)) در نقطه ی a یعنی اینکه ببینیم زمانی که x به حد کافی به a نزدیک می شود (مساوی a نمی شود) مقدار تابع به چه عددی نزدیک می شود.

حد یک تابع را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$

مثال(1):

تابع $f(x)=x^2$ را در نظر گرفته حد آن را زمانی که x به سمت عدد 2 میل می کند به دست آورید.

$$\lim_{x \to ۲} x^۲ = ۴$$

مثال(2):

تابع f(x)=5x-2 را در نظر گرفته حد آن را زمانی که x به سمت عدد 4 میل می کند به دست آورید.

$$\lim_{x \to ٤} ۵x-۳ = ۱۷$$

تمرین(1):

تابع $\frac{۲x}{x+۱}$ را در نظر گرفته حد آن را زمانی که x به سمت عدد 1 میل می کند به دست آورید.

تمرین(2):

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر گرفته حد آن را زمانی که x به سمت عدد 0 میل می کند به دست آورید.

تمرین(3):

تابع $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{۳}}{x-۳}$ را در نظر گرفته حد آن را زمانی که x به سمت عدد 3 میل می کند به دست آورید.

حد چپ و راست

حد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه ی x=0 به دست آورید.

می دانیم که x نمی تواند مقادیر کوچکتر از صفر را اختیار کند و لذا تنها می توانیم از طرف اعداد بزرگتر به صفر نزدیک شویم به این حد، **حد یک طرفه از راست** می گوییم.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

حد چپ یعنی اینکه از طرف چپ (اعداد کوچکتر از a) به a نزدیک شویم.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_1$$

قضیه:

تابع f(x) زمانی در نقطه ی a دارای حد است که حد چپ و راست آن برابر باشند.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال(3):

حد چپ و راست تابع $y = [x]$ را در نقطه x=1.5 و x=2 به دست آورید. این تابع در کدام نقطه حد دارد.

$$\lim_{x \to 1.5^+} [x] = 1 = \lim_{x \to 1.5^-} [x]$$

بنابراین تابع در نقطه x=1.5 دارای حد است و حد آن 1 می شود.

$$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} [x] = 1$$

بنابراین تابع در نقطه x=2 دارای حد نیست.

تمرین(4):

حد تابع $f(x) = \dfrac{x-[x]}{x-3}$ را در نقطه x=3 دست آورید.

تعریف ریاضی حد

حد تابع f(x) در نقطه ی x=a برابر L است $\lim_{x \to a} f(x) = L$

اگر به ازای هر عدد مثبت هر اندازه کوچک ϵ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر گاه $|x-a|<\delta$ باشد آنگاه $|f(x)-L|<\epsilon$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

قضایای حد

1) حد یک تابع ثابت در هر نقطه برابر همان مقدار ثابت است.f(x)=b

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

2) حد تابع خطی y=ax+b در نقطه x=c برابر است با

$$\lim_{x\to c} ax+b = ac+b$$

3) حد مجموع دو تابع در یک نقطه برابر است با مجموع حدود آن توابع

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

4) حد تفاضل دو تابع در یک نقطه برابر است با تفاضل حدود آن توابع

$$\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

5) حد حاصل ضرب دو تابع در یک نقطه برابر است با حاصل ضرب حدود آن توابع

$$\lim_{x\to a} f(x)\times g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \times L_2$$

6) حد خارج قسمت دو تابع در یک نقطه برابر است با خارج قسمت حدآن توابع بر یکدیگر (زمانی که مخرج مخالف صفر باشد)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

7) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و n عدد صحیح و مثبتی باشد

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n$$

تمرین(5):

حدود توابع زیر را به دست آورید.

① $y=x^2+3x-4 \quad x\to 2$

② $y=\dfrac{x+1}{2x-3} \quad x\to -1$

③ $y=\dfrac{x^2-4}{x-2} \quad x\to 2$

④ $y=\dfrac{x^2+1}{x+1} \quad x\to 1$

⑤ $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1} \quad x\to -1$

⑥ $y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x} \quad x\to 4$

قضیه فشردگی

اگر به ازای تمامی مقادیر x در یک فاصله ی معین شامل α (اما $x\neq\alpha$) داشته باشیم

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$$

$$\lim_{x\to\alpha} g(x)=\lim_{x\to\alpha} h(x)=L$$

در این صورت

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=L$$

مثال(4):

حد $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ را در نقطه صفر به دست آورید.

می دانیم

$$|\sin \tfrac{1}{x}| \leq 1$$

و

$$|x \sin \tfrac{1}{x}| = |x||\sin \tfrac{1}{x}| \leq |x|$$

یعنی

$$-|x| \leq x \sin \tfrac{1}{x} \leq |x|$$

$$\lim_{x \to 0} -|x| = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

حد در بی نهایت

حد زیر را به دست آورید

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{a'+\frac{b'}{x}+\frac{c'}{x^2}}$$

هنگامی که x به سمت بی نهایت میل کند، جملاتی مانند $\frac{b}{x}$ به سمت صفر میل می کنند بنابراین حد فوق برابر $\frac{a}{a'}$ است.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = \frac{a}{a'}$$

مثال(5):

حد توابع زیر را به دست آورید.

(1) $\lim_{x \to +\infty} y = \frac{x}{x+1} = 1$

(2) $\lim_{x \to +\infty} y = \frac{5x^3+4x^2+1}{2x^2+7x} = \infty$

(3) $\lim_{x \to +\infty} y = \frac{5x+2}{x^2+7x} = 0$

(4) $\lim_{x \to \infty} y = \frac{5x^2+2x}{7x^2+9x} = \frac{5}{7}$

ابهام در محاسبه ی حد

صورت های ابهام به صورت $\infty - \infty$ ، $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می باشد. ابتدا باید رفع ابهام نمود.

مثال(6):

حد $\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = 0$$

مثال(7):

حد $\sqrt{x+a} - \sqrt{x}$ زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \infty - \infty$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} \times \sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0$$

قضیه:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال(8):

حد $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ را در نقطه ی x=0 به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 3$$

مثال(6):

حد $f(x) = \frac{\sin 2t}{\sin t}$ را در نقطه ی t=0 به دست آورید.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin 2t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}$$

می دانیم حد خارج قسمت دو عبارت، برابر خارج قسمت حد صورت به حد مخرج است پس

$$\frac{\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{2\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}$$

اما در مورد صورت می دانیم اگر t به سمت صفر میل کند بنابراین x=2t نیز به سمت صفر میل می کند پس داریم

$$2\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2$$

و در نتیجه

$$\frac{2\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{1} = 2$$

پیوستگی

تابع y=f(x) در نقطه ی x=a پیوسته است اگر سه شرط زیر در نقطه ی a برقرار باشد

1) تابع در این نقطه تعریف شده باشد

2) تابع در این نقطه حد داشته باشد

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

3) مقدار تابع در این نقطه برابر حد تابع باشد.

$$f(a) = L = \lim_{x \to a} f(x)$$

گسستگی

اگر تابع f در نقطه ی a یکی از سه شرط فوق را نداشته باشد در این نقطه گسسته است.

مثال(9):

نقاط گسستگی تابع $y = [x]$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه حد چپ و راست تابع در نقاط صحیح برابر نیست مثلا

$$\lim_{x \to 1^+} [x] = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 1^-} [x] = 0$$

بنابراین این تابع در نقاط صحیح گسسته می باشد.

اگر تابع در نقطه ای حد داشته باشد ولی در این نقطه گسسته باشد، گسستگی را **حذف شدنی** می گوییم.

مثال(10):

نقاط گسستگی تابع $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-3}$ را به دست آورید.

با توجه به اینکه تابع فوق در نقطه x=3 تعریف نشده است بنابراین گسسته می باشد. ولی تابع فوق در نقطه x=3 دارای حد می باشد

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x-3) = 0$$

بنابراین گسستگی تابع حذف شدنی است و می توان آنرا به صورت زیر نوشت.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{x-3} = x-3 & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$$