6

متغیرهای تصادفی با توزیع توأم

1. دو تاس سالم پرتاب می‌شوند. تابع احتمال توأم X و Y را در هر یک از حالات زیر به دست آورید.

الف) X عدد بزرگ‌تر روی دو تاس و Y مجموع مقادیر دو تاس باشد.

ب) X عدد روی تاس اول و Y عدد بزرگ‌تر باشد.

ج) X عدد کوچک‌تر و Y عدد بزرگ‌تر باشد.

(الف)

Y \ X	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

(ب)

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	0	0	0
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$

(ج)

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	0	0	0	0	0
2	$2/36$	$1/36$	0	0	0	0
3	$2/36$	$2/36$	$1/36$	0	0	0
4	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$1/36$	0	0
5	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$1/36$	0
6	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$2/36$	$1/36$

2. فرض کنید 3 توپ به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل 5 توپ سفید و 8 توپ قرمز است انتخاب شود. با تعریف،

$$X_i=\begin{cases} 1 & \text{اگر توپ } i \text{ ام انتخابی سفید باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه تابع احتمال توأم

الف) X_1 و X_2 ب) X_1، X_2 و X_3

$$P(X_1=0,X_2=0)=\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}\times1=\frac{14}{39},\ P(X_1=0,X_2=1)=\frac{8}{13}\times\frac{5}{12}\times1=\frac{10}{39},$$
$$P(X_1=1,X_2=0)=\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}\times1=\frac{10}{39},\ P(X_1=1,X_2=1)=\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}\times1=\frac{5}{39}$$

(ب)

$$P(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{28}{143},$$
$$P(X_1=0,X_2=0,X_3=1)=\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{70}{429}$$

و به همین ترتیب مابقی به دست می‌آید.

3. در مسأله 2 فرض کنید که توپهای سفید شماره گذاری شده‌اند. با تعریف،

$$Y_i=\begin{cases} 1 & \text{اگر } i \text{ امین توپ سفید انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه تابع احتمال توأم

الف) Y_1 و Y_2 ب) Y_1، Y_2 و Y_3

(الف)

$$P(Y_1=0,Y_2=0)=\frac{\binom{11}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{165}{286}=\frac{11}{13}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{11},$$

$$P(Y_1=0,Y_2=1)=\frac{\binom{11}{2}}{\binom{13}{3}}=\frac{55}{286}=\frac{1}{13}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{11}\times\binom{3}{2},$$

$$P(Y_1=1,Y_2=0)=\frac{\binom{11}{2}}{\binom{13}{3}}=\frac{55}{286},P(Y_1=1,Y_2=1)=\frac{\binom{11}{1}}{\binom{13}{3}}=\frac{11}{286}$$

ب)

$$P(Y_1=0,Y_2=0,Y_3=0)=\frac{\binom{10}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{120}{286},P(Y_1=0,Y_2=0,Y_3=1)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{13}{3}}=\frac{45}{286},$$

$$P(Y_1=0,Y_2=1,Y_3=0)=\frac{45}{286},P(Y_1=0,Y_2=1,Y_3=1)=\frac{10}{286},$$

$$P(Y_1=1,Y_2=0,Y_3=0)=\frac{45}{286},P(Y_1=1,Y_2=0,Y_3=1)=\frac{10}{286},$$

$$P(Y_1=1,Y_2=1,Y_3=0)=\frac{10}{286},P(Y_1=1,Y_2=1,Y_3=1)=\frac{1}{286}$$

4. مسأله 2 را در حالت با جایگذاری تکرار کنید.

$$P(X_1=0,X_2=0)=\frac{8}{13}\times\frac{8}{13}=\frac{64}{169},P(X_1=0,X_2=1)=\frac{8}{13}\times\frac{5}{13}=\frac{40}{169}$$

$$P(X_1=1,X_2=0)=\frac{5}{13}\times\frac{8}{13}=\frac{40}{169},P(X_1=1,X_2=1)=\frac{5}{13}\times\frac{5}{13}=\frac{25}{169}$$

ب)

$$P(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=\frac{8}{13}\times\frac{8}{13}\times\frac{8}{13}=\frac{512}{2197},$$

$$P(X_1=0,X_2=0,X_3=1)=\frac{8}{13}\times\frac{8}{13}\times\frac{5}{13}=\frac{320}{2197}$$

و به همین ترتیب مابقی به دست می‌آید.

5. بند (الف) مسأله 3 را در حالت با جایگذاری تکرار کنید.

$$P(Y_1=0,Y_2=0)=\frac{11}{13}\times\frac{11}{13}\times\frac{11}{13}=\frac{1331}{2197},P(Y_1=0,Y_2=1)=\frac{1}{13}\times\frac{12}{13}\times\frac{12}{13}\times\binom{3}{2}=\frac{397}{2197},$$

$$P(Y_1=1,Y_2=0)=\frac{1}{13}\times\frac{12}{13}\times\frac{12}{13}\times\binom{3}{2}=\frac{397}{2197},P(Y_1=1,Y_2=1)=\frac{72}{2197}$$

6. جعبه‌ای شامل 5 ترانزیستور است و می‌دانیم 2 عدد آنها معیوب هستند. ترانزیستورها را یک به یک آزمایش نموده تا معیوبها مشخص شوند. تعداد آزمایشهایی که لازم است تا اولین ترانزیستور معیوب معلوم شود را با N_1 و تعداد آزمایشهای اضافی تا معلوم شدن دومین ترانزیستور معیوب را با N_2 نشان می‌دهیم. تابع احتمال توأم N_1 و N_2 را به دست آورید.

N_1وN_2 مقادیر 1، 2، 3و 4 را اختیار می‌کنند.

$$P(N_1=1,N_2=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10},P(N_1=1,N_2=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

$$,P(N_1=1,N_2=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10},P(N_1=1,N_2=4)=\frac{1}{10}$$

$$P(N_1=2,N_2=1)=\frac{1}{10},P(N_1=2,N_2=2)=\frac{1}{10},P(N_1=2,N_2=3)=\frac{1}{10}$$

$$P(N_1=3,N_2=1)=\frac{1}{10},P(N_1=3,N_2=2)=\frac{1}{10},P(N_1=4,N_2=1)=\frac{1}{10}$$

7. دنباله‌ای از آزمایشهای مستقل برنولی را که احتمال موفقیت هر کدام برابر p است، در نظر می‌گیریم. اگر X_1 تعداد شکستها قبل از اولین موفقیت و X_2 تعداد شکستهای بین دو موفقیت باشد. تابع احتمال توأم X_1 و X_2 را به دست آورید.

آزمایش تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که به دومین موفقیت خود برسیم.

$$P(X_1=i,X_2=j)=(1-p)^i p(1-p)^j p=p^2(1-p)^{i+j}$$

8. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=c(y^2-x^2)e^{-y}\qquad -y\le x\le y,\quad 0<\mathrm{y}<\infty$$

الف) c را پیدا کنید. ب) توابع چگالی کناری X و Y را به دست آورید.

الف) $1=c\int_0^\infty\int_{-y}^{y}(y^2-x^2)e^{-y}dxdy\Rightarrow c=\frac{1}{8}$

ب) $f_Y(y)=\frac{1}{8}\int_{-y}^{y}(y^2-x^2)e^{-y}dx=\frac{1}{6}e^{-y}y^3$

$$f_X(x)=\frac{1}{8}\int_0^\infty(y^2-x^2)e^{-y}dy=\frac{(2-x^2)}{8}$$

9. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\qquad 0<x<1,\quad 0<y<2$$

الف) تحقیق کنید این تابع در حقیقت یک تابع چگالی توأم است.

ب) تابع چگالی کناری X را محاسبه کنید.

ج) $P\{X>Y\}$ را به دست آورید. د) $P\{Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2}\}$ را محاسبه کنید.

ه) $E[X]$ را پیدا کنید. و) $E[Y]$ را پیدا کنید.

الف) $\frac{6}{7}\int_0^2\int_0^1(x^2+\frac{xy}{2})dxdy=\frac{6}{7}\int_0^2(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}y)dy=\frac{6}{7}\times\frac{7}{6}=1$

ب) $\frac{6}{7}\int_0^2(x^2+\frac{xy}{7})dy=\frac{6}{7}(2x^2+x)\qquad 0<x<1$

ج) $P(Y<X)=\frac{6}{7}\int_0^1\int_0^y(x^2+\frac{xy}{2})dydx=\frac{6}{7}\int_0^1(x^3+\frac{x^3}{4})dx=\frac{6}{7}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{56}$

د) $P(Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2})=\frac{P((Y>\frac{1}{2})\mathrm{I}\ (X<\frac{1}{2}))}{P(X<\frac{1}{2})}=\frac{0.154}{0.17857}=0.8624$

ه) $E(X)=\frac{6}{7}\int_0^2\int_0^1 x(x^2+\frac{xy}{2})dxdy=?,E(Y)=\frac{6}{7}\int_0^2\int_0^1 y(x^2+\frac{xy}{2})dxdy$

10. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=e^{-(x+y)} \qquad x\geq 0, \qquad y\geq 0$$

الف) $P\{X<Y\}$ را محاسبه کنید. ب) $P\{X<a\}$ را به دست آورید.

الف) $P(X<Y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x+y)}dxdy=\frac{1}{2}$

ب) $P(X<a)=\int_0^{\infty}\int_0^{a}e^{-(x+y)}dxdy=1-e^{-a}$

11. یک فروشنده تلویزیون حساب کرده است که 45 درصد از افرادی که وارد مغازه او می‌شوند یک دستگاه تلویزیون سیاه و سفید خریداری می‌کنند، 15 درصد یک دستگاه تلویزیون رنگی خریداری می‌کنند و 40 درصد برای وقت تلف کردن وارد مغازه می‌شوند. اگر در یک روز معین، 5 مشتری وارد مغازه او شوند. احتمال اینکه او 2 دستگاه تلویزیون سیاه و سفید و یک دستگاه تلویزیون رنگی بفروشد چقدر است؟

A، B و C به ترتیب بر خرید تلویزیون سیاه و سفید، خرید تلویزیون رنگی و وقت تلف کردن دلالت دارد. X و Y نیز به ترتیب به تعداد تلویزیون سیاه وسفید و رنگی فروخته شده اشاره دارد. با توجه به اینکه 5 مشتری وارد مغازه شده‌اند

$$P(X=2,Y=1)=\frac{5!}{2!\times 1!\times 2!}P(A)^2P(B)^1P(C)^2=\frac{5!}{2!\times 1!\times 2!}(.45)^2(.15)(.4)^2=0.1458$$

12. تعداد افرادی که در ساعات معینی وارد یک فروشگاه بزرگ می‌شوند یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda=10$ است. احتمال اینکه حداکثر 3 مرد وارد فروشگاه شوند به شرط اینکه 10 زن در آن ساعت وارد شده باشند را محاسبه کنید. چه فرضهایی را در نظر می‌گیرید.

فرض می‌کنیم تعداد مردان و زنان مستقل و دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda=5$ باشد.

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=33.3e^{-5}$$

13. A و B موافقت کردند در ساعت 12:30 بعدازظهر در محل معینی با هم ملاقات کنند. اگر A در ساعتی که به طور یکنواخت بین 12:15 و 12:45 توزیع شده است به محل ملاقات برسد و B به طور مستقل در ساعتی که به طور یکنواخت بین 12 و 13 توزیع شده است به محل ملاقات برسد، احتمال اینکه فردی که اول رسیده است بیشتر از 5 دقیقه منتظر نماند را پیدا کنید. احتمال اینکه A اول برسد چقدر است؟

اگر X و Y به ترتیب زمان رسیدن فرد A و فرد B را نشان دهد آنگاه X دارای توزیع یکنواخت بین (0،60) و Y دارای توزیع یکنواخت بین (15،45) است.

در قسمت اول قصد داریم احتمال $|X-Y|<5$ یعنی $-5<X-Y<5$ را به دست آوریم.

$$P(-5<X-Y<5)=P(-5+Y<X<Y+5)=\int_{15}^{45}\int_{y-5}^{y+5}\frac{1}{60\times 30}dxdy=\frac{1}{6}$$

$$P(X>Y)=\int_{15}^{45}\int_{y}^{60}\frac{1}{60\times 30}dxdy=0.5$$

14. آمبولانسی با سرعت ثابت در امتداد جاده‌ای به طول L حرکت می‌کند. در یک لحظه معین از زمان حادثه‌ای در نقطه‌ای که به تصادف روی جاده توزیع شده است رخ می‌دهد. [یعنی، فاصله‌اش از انتهای جاده توزیع یکنواخت روی فاصله (0، L) دارد.] همچنین فرض کنید که محل آمبولانس در لحظه حادثه نیز دارای توزیع یکنواخت است. توزیع فاصله آمبولانس از محل حادثه را با فرض استقلال حساب کنید.

15. بردار تصادفی (X, Y) دارای توزیع یکنواخت روی ناحیه R در صفحه است. اگر برای یک ثابت C تابع چگالی توأم آن به صورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases} C & (x,y)\in R \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) نشان دهید که مساحت ناحیه R برابر $1/C$ است.

با فرض اینکه (X, Y) به طور یکنواخت روی مربعی به مرکز (0،0) و طول 2 توزیع شده باشد،

ب) نشان دهید که X و Y مستقل هستند و هر کدام دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (1 ،1-) هستند.

ج) احتمال اینکه (X, Y) متعلق به دایره‌ای به شعاع 1 و مرکز (0،0) باشد چقدر است؟ یعنی $P\{X^2+Y^2\le 1\}$ را پیدا کنید.

(الف) با توجه به اینکه: مساحت $=\iint_R dydx$ و با در نظر گرفتن $C\iint_R dydx=1$ داریم $\iint_R dydx=\frac{1}{C}$ و بنابراین مساحت ناحیه R برابر با $\frac{1}{C}$ است.

(ب)

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{4},\qquad -1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},\qquad -1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1$$

در نتیجه X و Y مستقل هستند و $f_X(x)=\frac{1}{2},\ -1\le x\le 1$ و $f_Y(y)=\frac{1}{2},\ -1\le y\le 1$ است بنابراین X و Y دارای توزیع یکنواخت بر روی فاصله‌ی (1،1-) هستند.

(ج)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{4}dxdy=0.785$$

16. *

17. سه نقطه X_1، X_2 و X_3 به تصادف روی خط L انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد چقدر است؟

قصد داریم سه گوی X_1، X_2 و X_3 را مرتب کنیم که برای این کار !3 حالت وجود دارد و چون می‌خواهیم X_2 در مرکز باشد بنابراین $2\times1\times1$ حالت وجود دارد و بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{1}{3}$ است.

18. دو نقطه به تصادف روی طنابی به طول L انتخاب می‌کنیم به طوری که دو نقطه در دو طرف از نقطه وسط طناب قرار گیرند. [به بیان دیگر، دو نقطه X و Y متغیرهای تصادفی مستقل هستند به طوری که X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله ($\frac{L}{2}$ ،0) و Y دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (L ، $\frac{L}{2}$) است.] احتمال اینکه فاصله بین دو نقطه انتخابی بیشتر از $\frac{L}{3}$ باشد را پیدا کنید.

برای اینکه فاصله از $\frac{L}{3}$ بیشتر باشد اگر X از 0 تا $\frac{L}{6}$ تغیر کند Y می‌تواند از $\frac{L}{2}$ تا L مقدار بگیرد

$$\int_0^{\frac{L}{6}}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{4}{L^2}dydx=\frac{3}{9}$$

و اگر X از $\frac{L}{6}$ تا $\frac{L}{2}$ تغیر کند Y می‌تواند از $X+\frac{L}{3}$ تا L مقدار بگیرد

$$\int_{\frac{L}{6}}^{\frac{L}{2}}\int_{x+\frac{L}{3}}^{L}\frac{4}{L^2}dydx=\frac{4}{9}$$

در نتیجه $\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$

19. در مسأله 18، احتمال اینکه 3 پاره‌خط از 0 تا X، از X تا Y و از Y تا L بتوانند تشکیل اضلاع یک مثلث را بدهند پیدا کنید. (توجه کنید که 3 پاره‌خط می‌توانند تشکیل اضلاع یک مثلث را بدهند اگر طول هر کدام از آنها کمتر از مجموع طول دوتای دیگر باشد.)

ابتدا سه شرط را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$X < L - X \Rightarrow X < \frac{L}{2}$$

$$Y - X < L - Y + X \Rightarrow 2(Y - X) < L \Rightarrow (Y - X) < \frac{L}{2} \Rightarrow Y < \frac{L}{2} + X$$

$$L - Y < Y \Rightarrow \frac{L}{2} < Y$$

$$\frac{4}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}+x} dydx = \frac{1}{2}$$

20. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا X و Y مستقل هستند؟ اگر f(x,y) به صورت زیر باشد پاسخ چیست؟

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) $f(x,y) = xe^{-(x+y)} = xe^{-x}.e^{-y} = f(x)f(y)$

بنابراین مستقل هستند.

ب) چون $0 < x < y$ بنابراین X به Y بستگی دارد و مستقل نیستند.

21. اگر

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x + y \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) نشان دهید که f(x,y) یک تابع چگالی احتمال است.

ب) E[X] را پیدا کنید. ج) E[Y] را پیدا کنید.

(الف) باید نشان دهیم $\iint f(x,y)dxdy = 1$ است و با توجه به اینکه $-y \le x \le 1 - y, 0 \le x \le 1$ بنابراین $0 < x < 1 - y$ و

$$\int_0^1\int_0^{1-y} 24xydxdy = 1$$

(ب) $E(X) = \int_0^1\int_0^{1-y} 24x^2ydxdy = \frac{2}{5}$

(ج) $E(Y) = \int_0^1\int_0^{1-y} 24xy^2dxdy = \frac{2}{5}$

22. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟ ب) تابع چگالی X را پیدا کنید.

ج) P{X+Y<1} را به دست آورید.

الف) خیر مستقل نیستند.

ب) $f_X(x) = \int_0^1 (x + y)dy = \frac{1}{2} + x$

ج) $P(X + Y < 1) = \int_0^1\int_0^{1-x} (x + y)dydx = \frac{2}{3}$

23. متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f(x,y)=\begin{cases}12xy(1-x) & 0<x<1, \quad 0<y<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟ ب) E[X] را پیدا کنید.

ج) E[Y] را پیدا کنید. د) Var(X) را پیدا کنید.

ه) Var(Y) را پیدا کنید.

(الف) با توجه به اینکه $f(x,y)=12xy(1-x) \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$ و می‌توان آنرا به صورت حاصلضرب دو تابع چگالی $0<x<1 \quad f_X(x)=6x(1-x)$ و $0<y<1 \quad f_Y(y)=2y$ نوشت بنابراین X و Y مستقل هستند.

(ب) $E(X)=6\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{1}{2}$

(ج) $E(Y)=2\int_0^1 y^2 dy=\frac{2}{3}$

(د) $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

(ه) $Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

24. *

25. فرض کنید که زمانهای رسیدن 10^6 نفر به یک ایستگاه خدمات رسانی متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,10^6)$ باشند. اگر N نشان دهنده تعداد افرادی باشد که در ساعت اول می‌رسند، مقدار تقریبی $P\{N=i\}$ را پیدا کنید.

اگر A نشان دهنده این باشد که شخص ساعت اول به ایستگاه خدمات رسانی برسد.

$$P(A)=\int_0^1 \frac{1}{10^6}dx=\frac{1}{10^6}$$

چون p خیلی کوچک و n خیلی بزرگ است بنابراین می‌توانیم $P\{N=i\}$ را با توزیع پواسون تقریب بزنیم. ($\lambda=np=1$)

$$P\{N=i\}=\frac{e^{-1}}{i!}$$

26. *

27. اگر متغیر تصادفی X به طور یکنواخت روی فاصله (0، 1) توزیع شده باشد و متغیر تصادفی Y به طور نمایی با پارامتر $\lambda=1$ توزیع شده باشد، با فرض استقلال X و Y، توزیع Z را پیدا کنید اگر

الف) Z=X+Y ب) Z = X/Y

28. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند، توزیع $Z=X_1/X_2$ را پیدا کنید. همچنین $P\{X_1<X_2\}$ را محاسبه کنید.

29. وقتی جریان I (بر حسب آمپر) در مقاومت R (بر حسب اهم) جاری می‌شود، توانی به اندازه $W=I^2R$ (بر حسب وات) ایجاد می‌کند. فرض کنید که I و R متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی زیر باشند:

$$f_I(x)=6x(1-x) \qquad 0\le x\le 1$$
$$f_R(x)=2x \qquad 0\le x\le 1$$

تابع چگالی W را تعیین کنید.

30. متوسط تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از مجله‌ای 0.2 است. احتمال اینکه یک مقاله 10 صفحه‌ای شامل الف) 0، ب) بیشتر از 2 غلط تایپی باشد چقدر است؟ استدلال خود را بیان کنید.

در اینجا 10 توزیع پواسون مستقل را با هم جمع نموده‌ایم.

$$\lambda=10\times 0.2=2$$
$$P(X>2)=1-[P(X=0)+P(X=1)+p(x=2)]=1-5e^{-2}$$

$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - 3e^{-2}$

31. متوسط تعداد سوانح هوایی شرکتهای هواپیمایی تجاری در دنیا 2.2 هواپیما در ماه است. احتمال پیشامدهای زیر را به دست آورید.

الف) بیشتر از 2 سانحه در ماه آینده باشد. ب) بیشتر از 4 سانحه در دو ماه آینده باشد.

ج) بیشتر از 5 سانحه در سه ماه آینده باشد.

الف) $\lambda = 2.2, P(X > 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + p(x=2)] = 1 - (5.62)e^{-2.2}$

ب) $\lambda = 4.4, P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (44.89)e^{-4.4}$

ج) $\lambda = 6.6, P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$

32. میزان فروش ناخالص هفتگی روزنامه فروشی متغیر تصادفی نرمال با میانگین 2200 دلار و انحراف معیار 230 دلار است. مطلوب است احتمال

الف) کل فروش ناخالص او در دو ماه آینده از 5000 دلار تجاوز کند؟

ب) فروش هفتگی حداقل در 2 هفته از 3 هفته آیند از 2000 دلار تجاوز کند؟

چه فرضهای را برای استقلال در نظر گرفتید؟

فرض می‌کنیم که فروش هفتگی برای هفته‌های مختلف از هم مستقل باشند.

الف) با فرض اینکه هر دو ماه شامل 8 هفته است بنابراین

$E(X) = 8 \times 2200 = 17600, \sqrt{VAR(X)} = 1840$

$P(X > 5000) = P(Z > -6.8) = 1$

ب) ابتدا احتمال اینکه فروش هفتگی بیش از 2000 دلار باشد را به دست می‌آوریم.

$P(Y > 2000) = P(Z > -0.87) = 0.8078$

$P(W \geq 2) = P(W=2) + P(W=3) = \binom{3}{2}(0.8078)^2(0.1922) + (0.8078)^3$

33. رکورد بولینگ فرد A دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین 170 و انحراف معیار 20 است. در حالی که رکورد بولینگ فرد B دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین 160 و انحراف معیار 15 است. اگر A و B هر کدام یک بازی کنند، با فرض اینکه رکوردهای حاصل متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند، احتمالهای زیر را با تقریب به دست آورید:

الف) رکورد A بالاتر باشد.

ب) مجموع رکوردشان بیشتر از 350 باشد.

الف) X_A و X_B به ترتیب رکورد بولینگ فرد A و B می‌باشد.

$E(X_A - X_B) = 10, \sqrt{VAR(X_A - X_B)} = \sqrt{400+225} = 25$

$E(X_A + X_B) = 330, \sqrt{VAR(X_A + X_B)} = \sqrt{400+225} = 25$

$P(X_A > X_B) = P(X_A - X_B > 0) = P(Z > -0.4) = P(Z < 0.4) = 0.6554$

ب) $P(X_A + X_B > 350) = P(Z > 0.8) = 1 - P(Z < 0.8) = 0.2119$

34. بر اساس اطلاعات مرکز ملی برای آمارهای بهداشتی آمریکا، 25.2 درصد مردان و 23.6 درصد زنان صبحانه نمی‌خورند. اگر نمونه‌های تصادفی 200 تایی از مردان و 200 تایی از زنان انتخاب شوند، احتمالهای زیر را با تقریب به دست آورید:

الف) حداقل 110 نفر از 400 نفر صبحانه نخورند.

ب) تعداد زنانی که صبحانه نمی‌خورند حداقل به تعداد مردانی باشد که صبحانه نمی‌خورند.

اگر X و Y به ترتیب تعداد مردان و زنانی که صبحجانه نمی‌خورند را نشان دهد آنگاه X و Y دارای توزیع درجمله ای با پارامترهای $p = 0.252$ و $p = 0.236$ هستند و می‌توانیم هر کدام را به وسیله توزیع نرمال تقریب بزنیم.

$X \approx N(50.4,37.7), Y \approx N(47.2,36.1)$

الف) $P(X+Y>110) = P(Z>1.44) = 0.0749$

ب) $P(Y \ge X) = P(Y-X>0) = P(Z>0.37) = 0.3557$

35. در مسأله 2، تابع احتمال شرطی X_1 به شرط الف) $X_2=1$ و ب) $X_2=0$ را حساب کنید.

الف) با توجه با تابع احتمال تؤام X و Y:

X_1	0	1
$P(X_1 \mid X_2=1)$	$\frac{10}{15}$	$\frac{5}{15}$

ب)

X_1	0	1
$P(X_1 \mid X_2=0)$	$\frac{14}{24}$	$\frac{10}{24}$

36. در مسأله 4، تابع احتمال شرطی X_1 به شرط الف) $X_2=1$ و ب) $X_2=0$ را حساب کنید.

مانند سوال قبل به دست می‌آید.

37. در مسأله 3، تابع احتمال شرطی Y_1 به شرط الف) $Y_2=1$ و ب) $Y_2=0$ را حساب کنید.

الف) با توجه با تابع احتمال تؤام X و Y:

Y_1	0	1
$P(Y_1 \mid Y_2=1)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

ب)

Y_1	0	1
$P(Y_1 \mid Y_2=0)$	$\frac{15}{20}$	$\frac{5}{20}$

38. در مسأله 5، تابع احتمال شرطی Y_1 به شرط الف) $Y_2=1$ و ب) $Y_2=0$ را حساب کنید.

مانند سوال قبل به دست می‌آید.

39. عدد X را به تصادف از مجموعه اعداد $\{1،2،3،4،5\}$ انتخاب می کنیم. حال اگر عددی را به تصادف از زیر مجموعه $\{1،2،...،X\}$ انتخاب و آن‌را Y بنامیم.

الف) تابع احتمال توأم X و Y را پیدا کنید.

ب) تابع احتمال شرطی X به شرط Y=i را برای $i = 1،2،3،4،5$ به دست آورید.

ج) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟ چرا؟

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5}, P(X=2,Y=1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}=P(X=2,Y=2)$$

X \ Y	1	2	3	4	5
1	$1/5$	0	0	0	0

ب)

2	$1/10$	$1/10$	0	0	0
3	$1/15$	$1/15$	$1/15$	0	0
4	$1/20$	$1/20$	$1/20$	$1/20$	0
5	$1/25$	$1/25$	$1/25$	$1/25$	$1/25$

X	1	2	3	4	5
P(X|Y=1)	$\frac{.2}{.457}$	$\frac{.1}{.457}$	$\frac{.067}{.457}$	$\frac{.05}{.457}$	$\frac{.04}{.457}$

خیر مستقل نیستند.

40. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر X و Y به ترتیب نشان دهنده عدد بزرگ‌تر و کوچک‌تر مشاهده شده باشند. تابع احتمال شرطی Y به شرط X=i (6 ،... ،i=1) را حساب کنید. آیا X و Y مستقل از هم هستند؟ چرا؟

41. تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$P(1,1)=\frac{1}{8},\quad P(1,2)=\frac{1}{4},\quad P(2,1)=\frac{1}{8},\quad P(2,2)=\frac{1}{2}$$

الف) تابع احتمال شرطی X به شرط Y=i (i=1، 2) را حساب کنید.

ب) آیا X و Y مستقل هستند؟

ج) مقادیر $P\{XY\le 3\}$ ، $P\{X+Y>2\}$ و $P\{\frac{X}{Y}>1\}$ را حساب کنید.

الف)

X	1	2
P(X|Y=1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X	1	2
P(X|Y=2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

ب) با توجه به تابع تابع احتمال تؤام X و Y نتیجه می‌گیریم که از هم مستقل نیستند.

ج)

$$P(XY\le 3)=1-P(X=2,Y=2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X+Y>2)=P(X-1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)=\frac{7}{8}$$

$$P(\frac{X}{Y}>1)=P(X>Y)=P(X=2,Y=1)=\frac{1}{8}$$

42. تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر است:

$$f(x,y)=xe^{-x(y+1)}\qquad x>0,\quad y>0$$

الف) تابع چگالی شرطی X به شرط Y=y و Y به شرط X=x را پیدا کنید.

ب) تابع چگالی Z=XY را پیدا کنید.

43. تابع چگالی توأم X و Y برابر است با

$$f(x,y)=c(x^2-y^2)e^{-x}\qquad x\ge 0,\qquad -x\le y\le x$$

توزیع شرطی Y به شرط X=x را به دست آورید.