5

متغيرهاي تصادفي پيوسته

1. اگر X يک متغير تصادفي با تابع چگالي زير باشد:

$$f(x)=\begin{cases} C(1-x^2) & -1<x<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار Cرا به دست آوريد.
ب) تابع توزيع تجمعي X چيست؟
الف)

$$\int_{-1}^{1} c(1-x)dx=1 \Rightarrow c\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1 \Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

ب)

$$\frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-x^2)dx=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\right]$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le -1 \\ \frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\right] & -1<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

2. سيستمي شامل يک واحد اصلي به اضافه يک واحد پشتيبان است که ميتواند براي يک مدت زمان تصادفي X کار کند. اگر تابع چگال X (بر حسب ماه) به صورت زير باشد:

$$f(x)=\begin{cases} Cxe^{-x/2} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

احتمال اينکه سيستم حداقل 5 ماه کار کند چقدر است؟
ابتدا مقدار C را به دست ميآوريم:

$$\int_{0}^{\infty} Cxe^{-x/2}dx=1 \Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

$$P(X\ge 5)=\int_{5}^{\infty}\frac{1}{4}xe^{-x/2}dx=(3.5)e^{-5/2}$$

3. تابع زير را در نظر بگيريد:

$$f(x)=\begin{cases} C(2x-x^3) & 0<x<\frac{5}{2} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آيا f ميتواند يک تابع چگالي باشد؟ در اين صورت، C را تعيين کنيد. مسأله را براي حالتي که f(x) به صورت زير است، تکرار کنيد.

$$f(x)=\begin{cases} C(2x-x^2) & 0<x<\frac{5}{2} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

برای اينکه تابع چگالی باشد بايد مقدار آن در بازه $(0,5/2)$ مثبت باشد

$$2x-x^3=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$$

با توجه به اينکه يکی از ريشهها $\sqrt{2}$ میباشد و در بازه $(\sqrt{2},5/2)$ مقدار $f(x)$ منفی است بنابراين تابع چگالی نيست

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

که در بازه $(2, 5/2)$ منفی می‌باشد بنابراین تابع فوق نیز تابع چگالی نیست.

4. تابع چگالي طول عمر یک قطعه الکترونیکي (بر حسب ساعت) به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \le 10 \end{cases}$$

الف) $P\{X>20\}$ را پیدا کنید.
ب) تابع توزیع تجمعي X را به دست آورید.
ج) احتمال اینکه از 6 قطعه الکترونیکي لااقل 3 تا براي حداقل 15 ساعت کار کنند چقدر است؟ چه فرضهایي را در نظر مي‌گیرید؟

(الف)
$$P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \le 10 \\ 1 - \dfrac{10}{y} & 10 < a < y \end{cases}$$

(ج) $P(X > 15) = \dfrac{2}{3}$ است و Y تعداد قطعاتي که بیشتر از 15 ساعت کار کند. فرض می‌کنیم طول عمر قطعات از یکدیگر مستقل هستند.

$$P(Y \ge 3) = \sum_{i=3}^{6} \binom{6}{i} (\frac{2}{3})^i (\frac{1}{3})^{6-i} = 0.9$$

5. یک ایستگاه پمپ بنزین، دو هفته یکبار بنزین دریافت مي‌کند. اگر حجم فروش هفتگي بر حسب هزار گالن یک متغیر تصادفي با تابع چگالي زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تا احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته معین 0.01 گردد؟

6. اگر تابع چگالي X به صورتهاي زیر باشد، $E[X]$ را محاسبه کنید:

الف)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} x e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

ب)
$$f(x) = \begin{cases} C(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ج)
$$f(x) = \begin{cases} 5 & x > 5 \\ 0 & x \le 5 \end{cases}$$

(الف) براي انتگرالگیري دو بار از روش جزء به جزء استفاده مي‌کنیم.

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{4} x^2 e^{-x/2} dx = 4$$

(ب) ابتدا با مساوي 1 قرار دادن انتگرال مقدار C را برابر با $\dfrac{3}{4}$ به دست مي‌آوریم.

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(x - x^3) dx = 0$$

(ج)
$$E(X) = \int_5^{\infty} \frac{5}{x} dx = \infty$$

7. تابع چگالي X به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

اگر $E[X]=\frac{3}{5}$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

$$E(X)=\int_0^1 x(a+bx^2)dx=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=\frac{3}{5}$$

$$\int_0^1(a+bx^2)dx=1\Rightarrow a+\frac{b}{3}=1\Rightarrow a=1-\frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow b=1.2,a=0.6$$

8. طول عمر یک لامپ الکترونیکي (بر حسب ساعت) یک متغیر تصادفي با تابع چگالي زیر است:

$$f(x)=xe^{-x}\qquad x\ge 0$$

متوسط طول عمر چنین لامپي را محاسبه کنید.

$$E(X)=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=2$$

9. *

10. قطارهایي که عازم مقصد A هستند از ساعت 7 صبح به فاصله 15 دقیقه به ایستگاه مي‌رسند. در حالي که قطارهاي عازم مقصد B از ساعت 7:05به فاصله 15 دقیقه وارد ایستگاه مي‌شوند.

الف) اگر مسافري در زماني که به طور یکنواخت بین 7 و 8 صبح توزیع شده است به ایستگاه برسد و سوار اولین قطاري که وارد ایستگاه مي‌گردد بشود، به چه نسبتي وي به مقصد A مي‌رود؟

ب) پاسخ بند (الف) را اگر مسافر در زماني به ایستگاه برسد که به طور یکنواخت بین 7:10 و 8:10 صبح توزیع شده است به دست آورید.

$$f(x)=\frac{1}{60}\qquad 7:00<x<8:00$$

(الف) براي اینکه وي به مقصد A برسد باید پس از رفتن B وارد ایستگاه شود؛ بنابراین چهار حالت ممکن است.

$$P(A)=P(5<x\le 15)+P(20<x\le 30)+P(35<x\le 45)+P(50<x\le 60)=$$

$$=4(\frac{10}{60})=\frac{2}{3}$$

(ب) براي اینکه وي به مقصد A برسد باید پس از رفتن B وارد ایستگاه شود؛ بنابراین پنج حالت ممکن است.

$$P(A)=P(10<x\le 15)+P(20<x\le 30)+P(35<x\le 45)+P(50<x\le 60)+P(5<x\le 10)=$$

$$=\frac{5}{60}+3(\frac{10}{60})+\frac{5}{60}=\frac{2}{3}$$

11. یک نقطه به تصادف روي پاره‌خطي به طول L انتخاب مي‌کنیم. منظور از این عبارت چیست؟ احتمال اینکه نسبت پاره‌خط کوتاه‌تر به پاره‌خط بزرگ‌تر کمتر از $\frac{1}{4}$ باشد را به دست آورید.

یعنی نقطه به طور یکنواخت در بازه $(0,L)$ قرار می‌گیرد. برای این منظور باید خط را به 5 قسمت تقسیم کنیم و نقطه‌ی‌خود را در بازه $(0,\frac{L}{5})$ یا $(\frac{4L}{5},L)$ انتخاب کنیم.

$$P(0<X<\frac{L}{5})+P(\frac{4L}{5}<X<L)=\frac{2}{5}$$

12. اتوبوسي بین دو شهر A و B که 100 مایل از هم فاصله دارند در حرکت است. اتوبوس در محلي خراب مي-شود که فاصله آن تا شهر A داراي توزیع یکنواخت روي فاصله (0، 100) است. اگر یک مرکز تعمیر اتوبوس در شهر A، یکي در شهر B و یکي در نقطه وسط راه بین دو شهر A و B باشد، پیشنهاد شده است که هرگاه این مراکز تعمیر به ترتیب در 25، 50 و 75 مایلي از A باشند کارایي بیشتري خواهند داشت. آیا موافق هستید؟ چرا؟

اگر X را فاصله اتوبوس تا شهر و Y_1 را فاصله اتوبوس تا نزدیکترین تعمیرگاه در مرحله الف و Y_2 را فاصله اتوبوس تا نزدیکترین تعمیرگاه در مرحله ب در نظر بگیریم

$$Y_1=\begin{cases}x & 0<x<25\\ 50-x & 25<x<50\\ x-50 & 50<x<75\\ 100-x & 75<x\end{cases}$$

$$Y_2=\begin{cases}25-x & 0<x<25\\ x-25 & 25<x<\frac{75}{2}\\ 50-x & \frac{75}{2}<x<50\\ x-50 & 50<x<\frac{125}{2}\\ 75-x & \frac{125}{2}<x<75\\ x-75 & 75<x\end{cases}$$

$$E(Y_1)=\frac{1}{100}\left[\int_0^{25}xdx+\dots+\int_{75}^{100}(100-x)dx\right]=12.5$$
$$E(Y_2)=16.4$$

بنابراین کارایی مرحله اول بیشتر است.

13. شما ساعت 10 صبح به یک ایستگاه اتوبوس می‌رسید و می‌دانید که اتوبوس در زماني که به طور یکنواخت بین 10 و 10:30 است به ایستگاه خواهد رسید.

الف) احتمال اینکه بیش از 10 دقیقه منتظر بمانید چقدر است؟

ب) اگر در ساعت 10:15 هنوز اتوبوس به ایستگاه نرسیده باشد، احتمال اینکه شما حداقل 10 دقیقه دیگر نیز منتظر بمانید چقدر است؟

الف) $P(10<X<30)=\frac{2}{3}$

ب) برای اینکه حداقل 10 دقیقه دیگر منتظر بمانیم اتوبوس باید از 10:25 دقیقه به بعد به ایستگاه برسد.

$$P(25<X<30\mid x>15)=\frac{P(25<X<30)}{P(x>15)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

14. فرض کنید X یک متغیر تصادفي یکنواخت روي فاصله (1 ،0) باشد. $E[X^n]$ را با استفاده از گزاره 2-1 محاسبه کرده و نتیجه را با تعریف امید رياضي مقایسه کنید.

$$E(X^n)=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$
$$Y=X^n\Rightarrow f(y)=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}\qquad 0\le y\le 1$$
$$E(Y)=\int_0^1\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}}dy=\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

15. اگر X یک متغیر تصادفي نرمال با پارامترهاي $\mu=10$ و $\sigma^2=36$ باشد، احتمالات زیر را محاسبه کنید:

الف) P{X>5} ب) P{4<X<16} ج) P{X<8}

د) P{X<20} ه) P{X>16}

الف) $P(X>5)=P(Z>-0.83)=0.7967$

ب) $P(4<X<16)=P(-1<Z<1)=0.6826$

ج) $P(X<8)=P(Z<-0.33)=0.3707$

د) $P(X<20)=P(Z<1.67)=0.9525$

ه) $P(X>16)=P(Z>1)=0.1587$

16. میزان باران سالانه (برحسب اینچ) در یک ناحیه معین داراي توزیع نرمال با $\mu=40$ و $\sigma=4$ است. احتمال اینکه از امسال براي مدت 10 سال منتظر بمانیم تا میزان بارندگي در سال بیش از 50 اینچ باشد را به دست آورید. چه فرضهایي را در نظر مي‌گیرید؟

ابتدا احتمال اینکه بیش از 50 اینچ باران ببارد را به دست می‌آوریم.

$P(X > 50) = P(Z > 2.5) = 0.0062$

اگر Yتعداد سالهایی باشد که بیش از 50 اینچ بارندگی داشته‌ایم آنگاه با فرض استقلال بارندگی سالانه Y دارای توزیع دوجمله‌ای است.

$$P(Y = 0) = \binom{10}{0}(0.0062)^0(0.9938)^{10} = 0.94$$

17. مردي تلاش در زدن هدفي دارد که اگر پرتاب او در محدوده یک اینچي از هدف باشد 10 امتیاز کسب مي‌کند، اگر بین 1 و 3 اینچ از هدف باشد 5 امتیاز و اگر بین 3 و 5 اینچ از هدف باشد 3 امتیاز کسب خواهد کرد. اگر فاصله پرتاب از هدف به طور یکنواخت بین 0 و 10 توزیع شده باشد، متوسط تعداد امتیازها را به دست آورید.

اگر Y را مقدار امتیاز در نظر بگیریم.

Y	10	5	3	0
P(Y)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

$E(Y) = 2.6$

18. فرض کنید که X یک متغیر تصادفي نرمال با میانگین 5 است. اگر P{X>9}=0.2 باشد، Var(X) را با تقریب به دست آورید.

$$P(X > 9) = 0.2 \Rightarrow P(X - 5 > 4) = 0.2 \Rightarrow P(Z > \frac{4}{\sigma}) = 0.2 \Rightarrow P(Z < \frac{4}{\sigma}) = 0.8$$

$$\frac{4}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \sigma = 4.762 \Rightarrow Var(X) = 22.68$$

19. اگر X یک متغیر تصادفي نرمال با میانگین 12 و واریانس 4 باشد. مقدار c را چنان پیدا کنید که P{X>c}=0.1 گردد.

$$0.1 = P(X > c) \Rightarrow P(Z > \frac{c-12}{2}) = 0.1 \Rightarrow P(Z < \frac{c-12}{2}) = 0.9$$

$$\frac{c-12}{2} = 1.28 \Rightarrow c = 14.56$$

20. اگر 65 درصد از جمعیت یک جامعه بزرگ موافق پیشنهاد افزایش مالیات مدرسه باشند، احتمال تقریبي اینکه یک نمونه تصادفي 100 نفري شامل موارد زیر باشد چقدر است؟

الف) حداقل 50 نفر موافق پیشنهاد باشند.

ب) بین 60 و 70 نفر موافق پیشنهاد باشند.

ج) کمتر از 75 نفر موافق پیشنهاد باشند.

(الف) $P(X \geq 50) = P(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \geq \frac{50-65}{\sqrt{22.75}}) = P(Z \geq -3.14) = 0.9992$

(ب) $P(60 < X < 70) = P(-1.15 < Z < 1.15) = 0.7498$

(ج) $P(X < 75) = P(Z < 1.09) = 0.9767$

21. فرض کنید طول قد (بر حسب اینچ) مردان 25 ساله یک متغیر تصادفي نرمال با پارامترهاي $\mu = 71$ و $\sigma^2 = 6.25$ است. چه درصدي از مردان 25 ساله بیشتر از 6 فوت و 2 اینچ قد دارند؟ چند درصد از مردان بلندتر از 6 فوت بیش از 6 فوت و 5 اینچ قد دارند؟

با توجه به اینکه هر فوت 12اینچ است.

$$P(X > 74) = P(Z > 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

$$\mathrm{P(X > 77 \mid X > 72)} = \frac{\mathrm{P(X > 77)}}{\mathrm{P(X > 72)}} = \frac{\mathrm{P(Z > 2.4)}}{\mathrm{P(Z > 0.4)}} = \frac{0.0082}{0.3446} = 0.024$$

22. پهناي قالبهاي میله‌هاي آلومینیومي (بر حسب اینچ) داراي توزیع نرمال با $\mu = 0.9000$ و $\sigma = 0.0030$ است. اگر حد مجاز تعیین شده براي پهناي قالبها برابر با 0.9000 ± 0.0050 باشد.

الف) چه درصدي از قالبها معیوب هستند؟

ب) حداکثر مقدار مجاز σ که باعث نمي‌شود بیشتر از 1 معیوب در 100 قالب داشته باشیم چقدر است؟

(الف) ابتدا احتمال معیوب نبودن را به دست مي‌آوریم.

$$P(0.895 < X < 0.905) = P(-\frac{5}{3} < Z < \frac{5}{3}) = 0.905$$

بنابراین احتمال معیوب بودن برابر با 0.095 است و در نتیجه 9.5 درصد قالبها معیوب است.
(ب) یعنی خواستار آن هستیم که 99 درصد از قالبها معیوب نباشد.

$$P(0.895 \le X \le 0.905) = 0.99 \Rightarrow P(-\frac{0.005}{\sigma} \le Z \le \frac{0.005}{\sigma}) = 0.99$$

$$\Phi(\frac{0.005}{\sigma}) - \Phi(-\frac{0.005}{\sigma}) = 0.99 \Rightarrow 1 - 2\Phi(-\frac{0.005}{\sigma}) = 0.99 \Rightarrow \Phi(-\frac{0.005}{\sigma}) = 0.005$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{0.005}{\sigma}) = 0.995 \Rightarrow \frac{0.005}{\sigma} = 2.575 \Rightarrow \sigma = 0.00194$$

23. یک تاس سالم هزار بار پرتاب مي‌شود. احتمال اینکه عدد 6 بین 150 تا 200 مرتبه مشاهده شود را با تقریب به دست آورید. اگر عدد 6 دقیقاً 200 مرتبه مشاهده شود، احتمال اینکه عدد 5 کمتر از 150 مرتبه مشاهده گردد را به دست آورید.

در اگر X تعداد دفعات رخ دادن عدد 6 باشد آنگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 1000$ و $p = \frac{1}{6}$
و میانگین 166.67 و انحراف معیار 11.8 می باشد.

$$P(149.5 < X < 200.5) = P(-1.46 < Z < 2.87) = 0.9258$$

برای حل این قسمت از دو روش می‌توان استفاده نمود یکی روش احتمال شرطی و دیگری با توجه به اینکه 200 مرتبه عدد 6 رخ داده است بنابراین در 800 آزمایش باقی مانده دیگر عدد 6رخ نمی‌دهد پس Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 800$ و $p = \frac{1}{5}$ است.

$$P(Y < 150.5) = P(Z < -0.84) = 0.2005$$

24. طول عمر تراشه‌هاي توليد شده توسط يک کارخانه توليد قطعات الکترونيکي داراي توزيع نرمال با پارامترهاي $\mu = 1.4 \times 10^6$ و $\sigma = 3 \times 10^5$ (بر حسب ساعت) است. احتمال تقريبي اينکه يک بسته 100 تايي از اين تراشه‌ها شامل 20 تراشه که طول عمرشان کمتر از 1.8×10^6 است را به دست آوريد.
اگر X برابربا طول عمر تراشه‌های تولید شده باشد.

$$P(X < 1.8 \times 10^6) = P(Z > \frac{4}{3}) = 0.9082$$

اگر Y را برابر با تعداد تراشه‌هایی که طول عمرشان کمتر از 1.8×10^6 است در نظر بگیریم آنگاه Y دارای توزیع دوجمله‌ای با p=0.9082 و n=100 می‌باشد.

$$P(Y = 20) = \binom{100}{20}(0.9082)^{20}(0.0918)^{80}$$

25. هر قطعه‌اي که توسط يک کارخانه توليد مي‌شود مستقل از يکديگر با احتمال 0.95 داراي کيفيت قابل قبول مي-باشد. احتمال تقريبي اينکه از 150 قطعه توليد شده حداکثر 10 قطعه غير قابل قبول باشد را به دست آوريد.
Xرا برابر با تعداد قطعات غیر قابل قبول در نظر می‌گیریم؛ Xدارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 150, p = 0.05$ است.

$$P(X < 10.5) = P(Z < 1.12) = 0.8686$$

26. دو نوع سکه در کارخانه‌اي توليد مي‌شود. يکي سالم و ديگري اريب که 55 درصد از مواقع شير مي‌آيد. يکي از اين سکه‌ها در اختيار ما است اما نمي‌دانيم که سکه سالم يا اريب است. براي تحقيق اينکه کدام يک از اين سکه‌ها را در اختيار داريم. آزمون آماري زير را انجام مي‌دهيم: سکه را 1000 مرتبه پرتاب کرده اگر حداقل 525 مرتبه شير مشاهده شود، آنگاه نتيجه مي‌گيريم که سکه اريب است ولي اگر کمتر از 525 مرتبه شير مشاهده شود، آنگاه نتيجه مي‌گيريم که سکه سالم است. اگر سکه واقعاً سالم باشد، احتمال اينکه به نتيجه غلط برسيم چقدر است؟ اگر سکه اريب باشد پاسخ چيست؟

Xرا برابر با تعداد دفعاتی که شیر ظاهر می‌شود در نظر می‌گیریم.اگر سکه سالم باشد آنگاه $p = \frac{1}{2}$ است و برای نتیجه غلط باید نتیجه بگیریم اریب است.

$$P(X > 524.5) = P(Z > 1.55) = 0.0606$$

اگر سکه اریب باشد $p = 0.55$ برای نتیجه غلط باید نتیجه بگیریم سالم است.

$P(X > 524.5) = P(Z > -1.62) = 0.9474$

$1 - 0.9474 = 0.0526$

27. در 10000 مرتبه پرتاب مستقل یک سکه، 5800 مرتبه شیر مشاهده شد. آیا منطقي است که فرض کنیم سکه سالم نیست؟ توضیح دهید.

احتمال چنین رخ دادی برای یک سکه سالم برابر با صفر است ولی با یک بار مشاهده نیز نمی‌توان نتیجه قطعی گرفت بنابراین مناسب است که آزمایش را چند بار تکرار کنیم و اگر همین نتایج به دست آمد نتیجه گیری نماییم. البته حال نیز با در نظر گرفتن درصد خطا می‌توان نتیجه گیری نمود.

28. 12 درصد از مردم چپ دست هستند. احتمال تقریبي این پیشامد که حداقل 20 چپ‌دست در مدرسه‌اي که 200 دانش‌آموز دارد وجود داشته باشد را به دست آورید. فرضهاي خود را بیان کنید.

X را برابر با تعداد چپ دستها در نظر می‌گیریم.

$$P(X > 20 - \frac{1}{2}) = P(Z > -0.9792) = P(Z < 0.9792) = 0.8365$$

*29

30. نقشه‌اي اندازه‌گیري شده به دو ناحیه سیاه و یفید تقسیم شده است. اگر نقطه‌اي به تصادف در ناحیه سفید انتخاب شود اندازه‌اي را مي‌دهد که داراي توزیع نرمال با میانگین $\mu = 4$ و واریانس $\sigma^2 = 4$ است، در حالي که اگر نقطه‌اي به تصادف از ناحیه سیاه انتخاب شود اندازه‌اي که داراي توزیع نرمال با پارامترهاي (9 ،6) است را خواهد داد. نقطه‌اي را به تصادف از نقشه انتخاب نموده و مقدار 5 مشاهده مي‌شود، اگر نسبت ناحیه سیاه در نقشه α باشد براي چه مقداري از α احتمالهاي نتیجه‌گیري اشتباه در مورد ناحیه انتخاب شده یکسان مي‌شود؟

31. *

32. مدت زماني که لازم است تا یک ماشین را تعمیر کنیم (بر حسب ساعت)، داراي توزیع نمایي با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ است.

الف) احتمال اینکه مدت تعمیر بیش از 2 ساعت طول کشد را به دست آورید.

ب) احتمال شرطي اینکه مدت زمان تعمیر حداقل 10 ساعت طول بکشد به شرط اینکه بیش از 9 ساعت از زمان تعمیر گذشته باشد را به دست آورید.

(الف) $P(X > 2) = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-1/2x} dx = 0.3679$

(ب) $P(X > 10 \mid X > 9) = \frac{P(X > 10)}{P(X > 9)} = e^{-1/2}$

33. طول عمر یک رادیو بر حسب سال داراي توزیع نمایي با پارامتر $\lambda = \frac{1}{8}$ است. اگر فردي یک رادیو دست دوم خریداري کند، احتمال اینکه 8 سال دیگر کار کند چقدر است؟

$$P(X > 8) = \int_8^\infty \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} dx = e^{-1}$$

34. فردي ادعا مي‌کند، کل مسافتي که (بر حسب هزار مایل) مي‌تواند یک خودرو طي کند قبل از اینکه نیاز به تعمیر داشته باشد یک متغییر تصادفي نمایي با پارامتر $\lambda = \frac{1}{20}$ است. فرد دیگري خودرو دست دومي دارد که ادعا مي‌کند فقط 10000 مایل کار کرده است. اگر فرد اول خودروي مزبور را خریداري کند. احتمال اینکه او حداقل 20000 مایل دیگر بتواند استفاده کند چقدر است؟ مسأله را با فرض اینکه طول عمر خودرو بر اساس مسافت طي شده داراي توزیع نمایي نبوده بلکه داراي توزیع یکنواخت (بر حسب هزار مایل) روي فاصله (40 ،0) باشد تکرار کنید.

توزیع نمایی: $P(X > 30 \mid X > 10) = \frac{P(X > 30)}{P(X > 10)} = \frac{e^{-3/2}}{e^{-1/2}} = e^{-1}$

توزیع یکنواخت: $P(X > 30 \mid X > 10) = \frac{P(X > 30)}{P(X > 10)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$

35. نرخ ابتلا به بیماري سرطان ریه براي یک مرد سیگاري t ساله به صورت زیر است:

$$\lambda(t) = 0.027 + 0.00025(t - 40)^2 \qquad t \geq 40$$

با فرض اینکه یک مرد 40 ساله سیگاري از سایر خطرات دیگر مصون باشد. احتمال اینکه او تا سن الف) 50 سالگي، ب) 60 سالگي بدون ابتلا به سرطان ریه زنده بماند چقدر است؟

$F(x)=1-\exp\{-\int_{40}^{x}(0.027+0.00025(t-40)^2)dt\}$

الف) $F(50)=1-\exp\{-\int_{40}^{50}(0.027+0.00025(t-40)^2)dt\}=1-e^{-0.35}$

ب) $F(60)=1-\exp\{-\int_{40}^{60}(0.027+0.00025(t-40)^2)dt\}=1-e^{-1.21}$

36. فرض کنید توزیع طول عمر قطعه‌اي داراي تابع نرخ خرابي $(t>0)\lambda(t)=t^3$ است (بر حسب سال). احتمال پیشامدهاي زير را به دست آوريد:

الف) طول عمر قطعه 2 سال باشد.

ب) طول عمر قطعه بين 0.4 تا 1.4 سال باشد.

ج) قطعه يک سال کار کرده، با چه احتمالي تا 2 سال کار مي‌کند؟

$F(x)=1-\exp\{-\int_{0}^{x}(t^3)dt\}=1-\exp\{-\frac{x^4}{4}\}$

الف) $F(2)=1-e^{-4}=0.982$

ب) $P(0.4<t<1.4)=F(1.4)-F(0.4)=-0.3827+0.9936=0.6109$

ج) $P(X<2\mid X>1)=\dfrac{P(1<X<2)}{P(X>1)}=0.9765$

37. اگر X به طور يکنواخت روي فاصله (1 ،1-) توزيع شده باشد، مطلوب است

الف) $P\{|X|>\frac{1}{2}\}$

ب) تابع چگالي متغير تصادفي |X|

$P(|X|>\frac{1}{2})=P((X<-\frac{1}{2})\cup(X>\frac{1}{2}))=P(X<-\frac{1}{2})+P(X>\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

ب) $F_Y(y)=P(Y<y)=P(|X|<y)=P(-y<X<y)=y$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0<y<1\Rightarrow f_Y(y)=1 \qquad 0<y<1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

38. اگر Y به طور يکنواخت روي فاصله (5 ،0) توزيع شده باشد، احتمال اينکه هر دو ريشه معادله $4x^2+4xY+Y+2=0$ حقيقي باشند چقدر است؟

برای اینکه هر دو ریشه حقیقی باشند باید

$b^2-4ac>0\Rightarrow 16y^2-16y-32>0$

حال با توجه به اینکه معادله $16y^2-16y-32=0$ دارای دو ریشه 1- و 2 است و با تعیین علامت متوجه می‌شویم که برای مثبت بودن معادله‌ی فوق باید $Y<-1$ یا $Y>2$ باشد در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{3}{5}$ است.

$P(Y<-1)=0, P(Y>2)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

39. اگر X يک متغير تصادفي نمايي با پارامتر $\lambda=1$ باشد، تابع چگالي متغير تصادفي $Y=\log X$ را محاسبه کنيد.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\log X<y)=P(X<10^y)=F_X(10^y)$

$F_Y(y)=\int_0^{10^y}e^{-x}dx=1-e^{-10^y}\Rightarrow f_Y(y)=10^y(\ln 10)e^{-10^y}$

40. اگر X به طور يکنواخت روي فاصله (1 ،0) توزيع شده باشد، تابع چگالي $Y=e^X$ را به دست آوريد.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^x<y)=P(X<\ln y)=F_X(\ln y)$

$F_Y(y)=\int_0^{\ln y}dx=\ln y\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{y} \qquad e^0<y<e^1$