4

متغيرهاي تصادفي

1. دو توپ را به تصادف از ظرفي با 8 توپ سفيد، 4 توپ سياه و 2 توپ نارنجي انتخاب مي‌كنيم. فرض كنيد براي هر توپ سياه 2 دلار جايزه و براي هر توپ سفيد انتخاب شده 1 دلار جريمه شويم. اگر X نشان دهنده ميزان برد باشد مقادير ممكن X و احتمال مربوط به هر مقدار را به دست آوريد.
براي تعيين مقادير X بايد تمام حالات ممكن (فضاي نمونه) را مورد بررسي قرار دهيم. هر دو توپ سياه X=4 ، یک توپ سياه و يكي سفيد X=1، یک توپ سياه و يكي نارنجي X=2، هر دو توپ سفيد X=-2، هر دو نارنجي X=0 و یک توپ سفيد و يكي نارنجي X=-1.

$$P(X=4)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}=0.0659,\ P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{2}}=0.3516,\ P(X=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{14}{2}}=0.879$$

$$P(X=-2)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}=0.30769,\ P(X=-1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=0.1758,\ P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}}=0.011$$

2. دو تاس منظم را پرتاب مي‌كنيم. اگر X نشان دهنده حاصل ضرب نتيجه دو تاس باشد مطلوب است محاسبه $P\{X=i\}$ براي $i = 1، 2، ...$.

X	1	2	3	4	5	6	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

X	12	15	16	18	20	24	25	30	36
P(X)	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. سه تاس را پرتاب مي‌كنيم، فرض كنيد تمامي $6^3 = 216$ نتايج ممكن هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده جمع سه عدد حاصل شده در هر پرتاب باشد، احتمال مقاديري كه X انتخاب مي‌كند را به دست آوريد.

X	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$

X	11	12	13	14	15	16	17	18
P(X)	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

4. 5 مرد و 5 زن را براساس امتيازي كه در يک امتحان كسب مي‌كنند، رتبه‌بندي مي‌كنيم. فرض كنيد هيچ دو امتيازي يكسان نباشد و تمامي !10 حالت مختلف رتبه‌بندي هم‌شانس باشند. اگر X نشان دهنده بالاترين رتبه كسب شده توسط یک زن باشد (مثلاً $X = 1$ يعني اينكه رتبه اول زن است) مطلوب است $P\{X= i\}$ براي $i = 1، 2، ...، 10$.
تعداد حالاتی که یک زن رتبه اول را کسب کند برابر با ترتیب 1 از 5 می باشد تعداد حالاتی که یک فرد مقام اول را کسب کند برابر با ترتیب 1 از 10 P_1^{10} می باشد.

$$P(X=1)=\frac{P_1^5}{P_1^{10}}$$

برای اینکه یک زن مقام دوم را کسب کند یک مرد باید اول شود و بنابراین تعداد حالات ممکن برابر با $P_1^5P_1^5$ است و در نتیجه

$$P(X=2)=\frac{P_1^5P_1^5}{P_2^{10}}=\frac{5}{18}$$

و به همین ترتیب

$$P(X=3)=\frac{P_2^5P_1^5}{P_3^{10}}=\frac{5}{36},P(X=4)=\frac{P_3^5P_1^5}{P_4^{10}}=\frac{5}{84},P(X=5)=\frac{P_4^5P_1^5}{P_5^{10}}=\frac{5}{252}$$

$$,P(X=6)=\frac{P_5^5P_1^5}{P_6^{10}}=\frac{5}{252},P(X=7)=0=P(X=8)=P(X=9)=P(X=10)$$

5. سکه‌اي را n مرتبه پرتاب مي‌کنيم، اگر اختلاف بين تعداد شيرها و تعداد خطهاي ظاهر شده را با X نشان دهيم. مقادير ممکن X چه هستند؟

اگر i تعداد شيرهاي ظاهر شده باشد n،... ، i= 0،1،2 . به ازاي هر i تعداد خطهاي ظاهر شده برابر با n-i مي‌باشد بنابراين تعداد خطهاي ظاهر شده براي هر i به صورت زير است.

$$n,n-1,n-2,\cdots,n-n=0$$

حال اختلاف اين دو را به دست مي‌آوريم.

$$n-0,n-2,\cdots,n-2n$$

و در نتيجه $X=n-2i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$

6. در مسأله 5 اگر سکه سالم باشد، براي n = 3 احتمالهاي مربوط به مقادير ممکن X را به دست آوريد.

با توجه به اينکه در اين حالت فضای نمونه شامل 8 عضو می باشد که در آن يا هر سه پيشامد شير يا دو خط و يک شير يا دو شير و سه خط يا هر سه خط وجود دارد بنابراين احتمال های مربوطه به صورت زير به دست می آيد.

$$P(X=3)=\frac{1}{8},P(X=1)=\frac{3}{8},P(X=-1)=\frac{3}{8},P(X=-3)=\frac{1}{8}$$

7. فرض کنيد تاسي را دو مرتبه پرتاب مي‌کنيم. متغيرهاي تصادفي زير چه مقاديري را مي‌توانند اختيار کنند.

الف) بيشترين عددي که در دو پرتاب حاصل مي‌شود.

ب) کمترين عددي که در دو پرتاب حاصل مي‌شود.

ج) مجموع دو عدد حاصل شده.

د) عدد ظاهر شده در اولين پرتاب، منهاي عدد ظاهر شده در دومين پرتاب.

(الف) $X=1,2,\cdots,6$

(ب) $Y=1,2,\cdots,6$

(ج) $Z=2,3,\cdots,12$

(د) $V=-5,-4,\cdots,0,\cdots,4,5$

8. اگر تاس مسأله 7 سالم باشد، احتمالهاي مربوط به متغيرهاي تصادفي بندهاي (الف) تا (د) را به دست آوريد.

(الف)

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

(ب)

Y	1	2	3	4	5	6
P(Y)	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ج)

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Z)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(د)

V	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P(V)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

9. مثال 1 – 2 را وقتي كه توپها با جايگذاري انتخاب مي‌شوند حل كنيد.
اگر X نشان دهنده بزرگترين عدد انتخاب شده باشد. اگر از A، B و C به ترتيب براي نشان دادن هرسه x، دو تا x و يكي كمتر از x و يكي x و دو تا كمتر از x استفاده كنيم آنگاه

$$P(X=20)=P(A\cup B\cup C)=(\frac{1}{20})^3+\binom{3}{1}(\frac{1}{20})^2\frac{19}{20}+\binom{3}{2}(\frac{1}{20})(\frac{19}{20})^2=\frac{1141}{8000}$$

$$P(X=19)=P(A\cup B\cup C)=(\frac{1}{20})^3+\binom{3}{1}(\frac{1}{20})^2\frac{18}{20}+\binom{3}{2}(\frac{1}{20})(\frac{18}{20})^2=\frac{1027}{8000}$$

$$P(X=18)=P(A\cup B\cup C)=(\frac{1}{20})^3+\binom{3}{1}(\frac{1}{20})^2\frac{17}{20}+\binom{3}{2}(\frac{1}{20})(\frac{17}{20})^2=\frac{919}{8000}$$

$$P(X=17)=P(A\cup B\cup C)=(\frac{1}{20})^3+\binom{3}{1}(\frac{1}{20})^2\frac{16}{20}+\binom{3}{2}(\frac{1}{20})(\frac{16}{20})^2=\frac{817}{8000}$$

$$P(X\geq 17)=0.488$$

10. در مثال 1 – 4، احتمال شرطي اينكه مبلغ i دلار برنده شويم به شرط اينكه مبلغي برنده شده باشيم را به دست آوريد. (براي i = 1، 2، 3).
A پیشامد اینکه مبلغی برنده شده باشیم

$$P(A)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{39}{165}+\frac{15}{165}+\frac{1}{165}=\frac{55}{165}$$

$$P(X=1|A)=\frac{P(X=1\cap A)}{P(A)}=\frac{39}{55},P(X=2|A)=\frac{15}{55},P(X=3|A)=\frac{1}{55}$$

11. الف) يک عدد صحيح N را از مجموعه $\{i=1,2,\ldots,10^3\}$ به تصادف انتخاب مي‌كنيم به طوري كه هر عدد شانس مساوي انتخاب شدن داشته باشد. احتمال اينكه عدد N بر 3 قابل قسمت باشد چقدر است؟ چنانچه به جاي 10^3، عدد 10^k جايگزين شود و k بزرگ و بزرگـتر شود. آنگاه پاسخها چگونه تغير مي‌يابند؟
با توجه به اینکه در مجموع 10^3 عدد داریم بنابراین $n_s=10^3$ است. و با توجه به اینکه در این مجموعه آخرین عددي كه بر 3 قابل قسمت است عدد 999 مي‌باشد كه ضريب 333 عدد 3 مي‌باشد بنابراين 333 عدد داريم كه بر 3 قابل قسمت است بنابراين اين احتمال برابر با $\frac{333}{1000}=0.333$ است. اگر k افزايش پيدا كند اين احتمال نيز افزايش مي‌يابد يعني براي k=4 برابر با 0.3333 و براي k=10 برابر با 0.3333333333 است.

12. در بازي « دو انگشت مورا » دو بازيكن يک يا دو انگشت خود را همزمان نشان داده و در همان حال حدس مي‌زنند كه طرف مقابل چند انگشت نشان مي‌دهد. اگر فقط يكي از بازيكنها درست حدس بزند او به اندازه جمع انگشتهايي كه نشان داده شده جايزه مي‌گيرد. اگر هر دو بازيكن درست حدس بزنند و يا هيچ‌كدام حدس صحيح نزنند هيچ جايزه‌اي داده نمي‌شود. يكي از بازيكنها را در نظر گرفته و ميزان جايزه‌اي كه در يک بازي به او تعلق مي‌گيرد را با X نشان دهيد.
الف) اگر بازيكنها به طور مستقل حدس بزنند و هر يک از چهار حالت نشان دادن انگشتها هم شانس باشند، مقادير مختلف X و احتمالهاي مربوطه را به دست آوريد.
ب) اگر بازيكنها به طور مستقل حدس بزنند و هر بازيكن تعداد انگشتاني را نشان بدهد كه حدس مي‌زند طرف مقابل نشان خواهد داد و به علاوه نشان دادن يک انگشت يا دو انگشت هم‌شانس باشد، مقادير X و احتمالهاي مربوطه را به دست آوريد.

زمانی برابر با 2 است که هر دو شخص یک انگشت خود را نشان دهند $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ و شخص مورد نظر درست حدس زده $\frac{1}{2}$ و شخص مقابل نادرست $\frac{1}{2}$ حدس بزند.

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

زمانی برابر با 3 است که یکی 2 انگشت و دیگری 1 انگشت را نشان بدهد (دو حالت)و و شخص مورد نظر درست حدس زده و شخص مقابل نادرست حدس بزند.

$$P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

زمانی برابر با 4 است که هر دو شخص دو انگشت خود را نشان دهند و شخص مورد نظر درست حدس زده و شخص مقابل نادرست حدس بزند.

$$P(X=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

زمانی برابر با 0 است یا هر دو درست یا هر دو نادرست حدس بزنند

$$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{16}$$

زمانی مقادیر منفی را دریافت می کند که خود اشتباه و شخص مقابل درست حدس بزند.

$$P(X=-2)=P(X=2),P(X=-3)=P(X=3),P(X=-4)=P(X=4)$$

ب) با توجه به شکل مسئله احتمالات قسمت الف پابرجاست.

13. یک بازاریاب براي فروش کتاب دایرهالمعارف با دو نفر وعده ملاقات دارد. در ملاقات اول او با احتمال 0.3 ميتواند کتاب را بفروشد و در ملاقات دوم مستقل از نتیجه ملاقات اول با احتمال 0.6 قادر خواهد بود که کتاب را به فروش برساند. هر فروش با شانس برابر ميتواند نوع با جلد گالینگور و با قیمت 1000 دلار و یا نوع با جلد معمولي با قیمت 500 دلار باشد. تابع احتمال میزان کل فروش (X) بر حسب دلار را به دست آورید.

اگر از A، B و C به ترتیب براي اشاره به پیشامد اینکه نفر اول بخرد، نفر دوم بخرد و جلد معمولي به فروش برسد.

$$P(X=0)=P(A^cB^c)=0.7\times0.4=0.28$$

$$P(X=500)=P(AB^cC)+P(A^cBC)=0.3\times0.4\times\frac{1}{2}+0.6\times0.7\times\frac{1}{2}=0.27$$

$$P(X=1000)=P(ABCC)+P(AB^cC^c)+P(A^cBC^c)=0.315$$

$$P(X=1500)=P(ABCC^c)+P(ABC^cC)=0.09$$

$$P(X=2000)=P(ABCC)=0.045$$

14. 5 عدد متفاوت را به تصادف بین بازیکنهاي 1 تا 5 تقسیم ميکنیم. وقتي که دو بازیکن اعداد خود را مقایسه مي-کنند کسي که عدد بزرگتري دارد برنده محسوب ميشود. ابتدا بازیکن 1 و 2 ، اعداد خود را مقایسه ميکنند، سپس برنده آنها با بازیکن شماره 3 و به همین ترتیب بازي ادامه مييابد. اگر X نشان دهنده تعداد دفعاتي باشد که بازیکن 1 برنده است. مطلوب است محاسبه P{X= i} براي i =0، 1، 2، 3 ،4 .

براي اینکه $X=0$ باشد بازیکن 1 باید در مقایسه با شخص 2 عدد کوچکتری داشته باشد حال اگر اعداد کوچک به بزرگ را به ترتیب با 1و2و...و5 نشان دهیم اگر بازیکن 2 عدد اول را اختیار کند شخص 1 هیچ حقی برای انتخاب ندارد، اگر شخص 2 عدد دوم را انتخاب کند شخص اول تنها یک حق انتخاب دارد و سه شخص باقی مانده !3 حالت برای انتخاب دارند و به همین ترتیب ...

$$P(X=0)=\frac{1\times3!+2\times3!+3\times3!+4\times3!}{5!}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

برای اینکه $X=1$ باشد باید عدد نفر اول از از عدد نفر دوم بیشتر و از عدد نفر سوم کوچکتر باشد حال اگر عدد نفر دوم 3 باشد نفر اول تنها می تواند 2 را اختیار کند و نفر چهارم و پنجم نیز !2 حق انتخاب دارند اگر عدد نفر سوم چهار باشد و نفر اول 3 را اختیار کند نفر دوم 2 حق انتخاب و اگر نفر اول 2 را اختیار کند نفر دوم 1حق انتخاب دارد و نفر سوم و چهارم !2 حق انتخاب دارند در مجموع 6 حالت اگر عدد نفر سوم 5 باشد در مجموع 12 حالت به وجود می آید بنابراین

$$P(X=1)=\frac{20}{5!}=\frac{1}{6}$$

برای اینکه $X=2$ باشد عدد نفر اول باید از نفر دوم و سوم بیشتر و از نفر چهارم کمتر باشد که پس از محاسبه جمعاً 10 حالت وجود دارد.

$$P(X=2)=\frac{10}{5!}=\frac{1}{12}$$

برای اینکه $X=3$ باشد عدد نفر اول باید از عدد نفر دوم ، سوم و چهارم بیشتر و از نفر عدد پنجم کمتر باشد که در این حالت نفر پنجم باید عدد 5را اختیار کند و نفر اول 4 و سه نفر باقیمانده !3 حق انتخاب دارند.

$$P(X=3)=\frac{3!}{5!}=\frac{1}{20}$$

برای اینکه $X=4$ باشد نفر اول باید 5 و چهار نفر باقی مانده !4 حق انتخاب دارند.

$$P(X=4)=\frac{4!}{5!}=\frac{24}{120}$$

15. مؤسسه ملي بسکتبال (NBA) که شامل 11 تیم است، بدترین رکوردهاي برد و باخت در شرطبنديهاي سال گذشته را منتشر کرده است. 66 توپ را در یک ظرف قرار داده هر یک از این توپها با نام یکي از تیمها نامگذاري شده، به طوري که 11 توپ به نام تیمي است که بدترین رکورد را داشته، 10 توپ به نام تیمي که دومین رکورد بد را داشته، 9 توپ به نام تیمي که سومین رکورد بد را داشته و به همین ترتیب یک توپ به نام تیمي که یازدهمین رکورد بد را به دست آورده نامگذاري شده‌اند. یک توپ را به تصادف انتخاب مي‌کنیم، تیمي که نامش روي توپ است اولین حق انتخاب را براي ورود به مسابقات دارد. توپ دیگري را انتخاب مي‌کنیم و اگر متعلق به تیم متفاوتي باشد آنگاه دومین حق انتخاب به او داده مي‌شود. (اگر توپ انتخاب شده متعلق به تیم اولي باشد آن را نادیده گرفته و توپ دیگري انتخاب مي‌کنیم این عمل آنقدر ادامه مي‌یابد تا تیم دوم انتخاب شود.) بالاخره توپ دیگري را انتخاب نموده و چنانچه متفاوت با دو تیم قبلي باشد حق انتخاب سوم به او داده مي‌شود. بقیه حق انتخابهاي 4 تا 11 را به 8 تیمي که انتخاب نشدند به ترتیب عکس رکورد برد و باخت آنها مي‌دهند. به طور مثال اگر تیم با بدترین رکورد در سه انتخاب اول نباشد آنگاه آن تیم حق انتخاب چهارم را دریافت مي‌دارد. اگر X نشان دهنده حق انتخاب تیمي با بدترین رکورد باشد، تابع احتمال X را به دست آورید.

16. در مسأله 15، فرض کنید تیم شماره 1، تیمي با بدترین رکورد باشد و تیم شماره 2، بدترین رکورد دوم را داشته باشد و ... . اگر Y_i نشان دهنده تیمي باشد که حق انتخاب i ام را دریافت مي‌دارد؛ یعني اگر اولین توپ انتخاب شده متعلق به تیم شماره 3 باشد، آنگاه $Y_1 = 3$ است. تابع احتمال الف) Y_1، ب) Y_2 و ج) Y_3 را به دست آورید.

الف) با توجه به اینکه تیم اول تیمی با بدترین رکورد است بنابراین 11 توپ برای آن در ظرف قرار دارد

Y_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(Y_1)$	$\frac{11}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{9}{66}$	$\frac{8}{66}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{6}{66}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{4}{66}$	$\frac{3}{66}$	$\frac{2}{66}$	$\frac{1}{66}$

17. فرض کنید که تابع توزیع تجمعي X به صورت زیر باشد:

$$F(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \frac{b}{4} & 0\le b<1\\ \frac{1}{2}+\frac{b-1}{4} & 1\le b<2\\ \frac{11}{12} & 2\le b<3\\ 1 & 3\le b\end{cases}$$

الف) $P\{X=i\}$ ($i=1، 2، 3$) را به دست آورید.

ب) $P\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\}$ را محاسبه کنید.

(الف)

$$P(X=1)=P(X\le 1)-P(X<1)=P(1\le X<2)-P(X<1)=\frac{1}{2}+\frac{b-1}{4}-\frac{b}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=P(2\le X<3)-P(X<2)=\frac{11}{12}-(\frac{1}{2}+\frac{2-1}{4})=\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{2}{11}$$

$$P(X=3)=P(X\le 3)-P(X<3)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

(ب)

$$P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=P(X<\frac{3}{2})-P(X<\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

18. سکه‌اي منظم را 4 مرتبه به طور مستقل پرتاب مي‌کنیم. اگر X نشان دهنده تعداد شیرهاي ظاهر شده باشد. تابع احتمال متغیر تصادفي $X-2$ را رسم کنید.

X-2	-2	-1	0	1	2
P(X-2)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

19. اگر تابع توزیع تجمعی X به صورت زیر داده شود:

$$F(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \frac{1}{2} & 0\le b<1\\ \frac{3}{5} & 1\le b<2\\ \frac{4}{5} & 2\le b<3\\ \frac{9}{10} & 3\le b<3.5\\ 1 & 3.5\le b\end{cases}$$

تابع احتمال X را به دست آورید.

X	0	1	2	3	3.5
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

20. یک کتاب بازیهاي برد و باخت، راهبرد برد را در یک بازي به صورت زیر تجویز ميکند. این کتاب پیشنهاد ميدهد که یک بازیکن 1 دلار روي رنگ قرمز شرطبندي کند، اگر رنگ قرمز ظاهر شود (که احتمال $\frac{18}{38}$ دارد) آنگاه وي 1 دلار جایزهاش را بردارد و متوقف شود. اگر او بازنده شد (که احتمال $\frac{20}{38}$ دارد) باید یک دلار دیگر روي رنگ قرمز در دور بعدي شرطبندي نموده و سپس بازي را متوقف نماید. اگر X نشان دهنده میزان برد وي باشد،

الف) $P\{X>0\}$ را به دست آورید.

ب) آیا قانع هستید که راهبرد مطرح شده یک راهبرد برد است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

ج) E[X] را به دست آورید.

X	-2	0	1
P(X)	$\frac{400}{1444}$	$\frac{360}{1444}$	$\frac{684}{1444}$

الف) $P(X>1)=\frac{684}{1444}$

ب) به نظر راهبرد ارائه شده یک راهبرد برد نمی باشد زیرا $P\{X>0\}$ کمتر از $\frac{1}{2}$ است.

ج) $E(X)=\frac{-116}{1444}$

همان طور که ملاحظه می شود امید برد منفی است یعنی همراه با زیان و بنابراین راهبرد مطرح شده نمی تواند یک راهبرد سود باشد.

21. چهار اتوبوس که حامل 148 دانشآموز از یک مدرسه هستند به یک استادیوم فوتبال وارد ميشوند. اتوبوسها به ترتیب حامل 40، 33، 25 و 50 دانشآموز هستند. یک دانشآموز را به تصادف انتخاب نموده، فرض کنید X نشان دهنده تعداد دانشآموزاني باشد که در اتوبوسي بودهاند که این دانشآموز از آن انتخاب شده است. یکي از چهار راننده را نیز به تصادف انتخاب ميکنیم، فرض کنید Y نشان دهنده تعداد دانشآموزان اتوبوس آن راننده باشد.

الف) کدام یک از مقادیر E[X] یا E[Y] را فکر ميکنید بزرگتر هستند؟ چرا؟

ب) مقادیر E[X] و E[Y] را محاسبه کنید.

X	25	33	40	50
P(X)	$\frac{25}{148}$	$\frac{33}{148}$	$\frac{40}{148}$	$\frac{50}{148}$

Y	25	33	40	50
P(Y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=\frac{5814}{148}=39.28,\qquad E(Y)=37$

22. فرض کنید 2 تیم یک سري مسابقه با یکدیگر بدهند و وقتي که یکي از تیمها i مرتبه برنده شد بازي متوقف گردد. اگر در هر بازي، تیم A با احتمال P برنده شود، امید ریاضي تعداد بازیها را در حالات الف) $i=2$ و ب) $i=3$ به دست آورید. همچنین در هر دو حالت نشان دهید که امید ریاضي وقتي حداکثر ميشود که $P=\frac{1}{2}$ باشد.

Xرا برابر با تعداد بازیهای انجام شده در نظر می گیریم اگر $i=2$ باشد آن گاه X تنها می تواند مقادیر 2 و 3 را اختیار کند در اینجا مهم نیست که کدام شخص برنده شود بنابراین احتمال اینکه پس از 2 بازی، مسابقه تمام شود برابر است با برنده شدن A یا B همچنین برای محاسبه $X=3$ می دانیم که اگر A بخواهد برنده شود نتیجه آزمایش سوم باید به سود A تمام شودولی یکی از دو آزمایش اول باید به سود B تمام شود یعنی $\binom{2}{1}$ حالت انتخاب و به این ترتیب محاسبه می شود.

الف)

X	2	3
P(X)	$P^2+(1-P)^2$	$\binom{2}{1}P^2(1-P)+\binom{2}{1}(1-P)^2P$

ب)

X	3	4	5
P(X)	$P^3+(1-P)^3$	$\binom{3}{1}P^3(1-P)+\binom{3}{1}(1-P)^3P$	$\binom{4}{2}P^3(1-P)^2+\binom{4}{2}(1-P)^3P^2$

23. فرض کنید 1000 دلار سرمایه دارید و فروشندهاي محصول خود را به ازاي هر انس 2 دلار به فروش مي-رساند. در نظر بگیرید که بعد از یک هفته فروشنده محصول خود را براي هر انس با شانس برابر به مبلغ یک دلار یا 4 دلار به فروش رساند.

الف) اگر هدف شما حداکثر نمودن متوسط پولي باشد که در آخر هفته دارید، چه راهبردي را باید به کار بگیرید؟

ب) اگر هدف شما حداکثر نمودن میزان محصولي باشد که در آخر هفته صاحب آن هستید چه راهبردي را باید انتخاب کنید؟

X: میزان محصول خریداري شده در ابتداي هفته

Y: میزان پولي که در پایان هفته داریم

اگر ابتداي هفته x انس خریداري کنیم (X=1،2،...،500) آنگاه مقدار پولي که در پایان هفته بدست ما ميرسدبرابر است با y که تابع احتمال آن به صورت زیر است.

Y	1000-x	1000+2x
P(Y)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و در نتیجه $E(Y)=\frac{1}{2}(2000+x)$ است که یک تابع صعودي از x ميباشد بنابراین هر چه x بیشتر باشد E(Y) نیز مقدار بیشتري اختیار ميکند در نتیجه x=500 در نظر ميگیریم یعني ابتداي هفته همهي پول خود را خرید ميکنیم.

(ب) X: میزان محصول خریداري شده در ابتداي هفته باشد (فرض که همه پول را خرید کنیم.)

Y: میزان محصولي که در پایان هفته داریم

Y	$x+(1000-2x)$	$x+(1000-2x)/4$
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و در نتیجه $E(Y)=\frac{1}{2}(1250-\frac{1}{2}x)$ است که یک تابع نزولي از x ميباشد بنابراین هر چه x کمتر باشد E(Y) مقدار بیشتري اختیار ميکند در نتیجه بهتر است ابتداي هفته هیچ خریدي انجام ندهیم.

24. *

25. یک ماشین سرگرمي داراي سه گردونه است که روي هر کدام 20 علامت به صورت شکلهاي پرتقال، لیمو، آلبالو، آلو، زنگوله و شمش قرار دارد که تعداد آنها به صورت زیر تنظیم شده است:

	گردونه 1	گردونه 2	گردونه 3
آلبالو	7	7	0
پرتقال	3	7	6
لیمو	3	0	4
آلو	4	1	6
زنگوله	2	2	3
شمش	1	3	1
جمع	20	20	20

بر اساس جدول فوق مثلاً در گردونه 1، 7 علامت آلبالو، 3 علامت پرتقال و ... قرار دارد. میزان برد و باخت در یک شرطبندي این بازي نیز بر اساس جدول زیر تعیین گردیده است:

گردونه 1	گردونه 2	گردونه 3	میزان برد و باخت
شمش	شمش	شمش	60
زنگوله	زنگوله	زنگوله	20
زنگوله	زنگوله	شمش	18
آلو	آلو	آلو	14
پرتقال	پرتقال	پرتقال	10
پرتقال	پرتقال	شمش	8
آلبالو	آلبالو	هر چیز دیگر	4
آلبالو	غیر از آلبالو	هر چیز دیگر	2
غیر از حالات فوق			-1

اگر بازیکني یک مرتبه بازي را انجام دهد و هر گردونه به طور مستقل گردش کند امید ریاضي میزان برد را به دست آورید.

X	60	20	18	14	10	8	4	2	-1
$P(X)$	$\frac{3}{q}$	$\frac{12}{q}$	$\frac{4}{q}$	$\frac{24}{q}$	$\frac{126}{q}$	$\frac{21}{q}$	$\frac{980}{q}$	$\frac{1820}{q}$	$\frac{5010}{q}$

که در آن q=8000 است و بنابراین $E(X)=\frac{4806}{8000}$ است.

26. عددي از 1 تا 10 را به تصادف انتخاب ميکنیم. شما مجاز هستید که با سؤالاتي که پاسخ آنها بله یا خیر است عدد انتخاب شده را حدس بزنید. امید ریاضي تعداد سؤالاتي که لازم است تا حدس صحیح زده شود را در هر یک از حالات زیر به دست آورید:

الف) i امین سؤال شما این باشد که « آیا عدد نوشته شده i است.» (10 ، ... ،2 ،1 = i).

ب) در هر سؤال سعي کنید که نصف بقیه اعداد را که نزدیک هستند حذف کنید.

X برابر است با تعداد سوالات لازم برای رسیدن به جواب صحیح

برای محاسبه باید دقت نمود که مثلاً در حالت $X = 3$ ابتدا دو جواب نادرست داده ایم و سپس در مرتبه سوم جواب صحیح و چون یک سوال را دو مرتبه نمی پرسیم یک عدد را دو بار مورد ارزیابی قرار نمی دهیم بنابراین احتمال مورد نظر به صورت زیر است.

$$P(X=3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

27. یک موسسه بیمه نامه‌اي را مي‌نويسد که اگر در طول یک سال حادثه E اتفاق افتد باید مبلغ A را پرداخت نماید. اگر شرکت بیمه برآورد کندکه پیشامد E با احتمال p در طول یک سال اتفاق مي‌افتد چه مقدار باید حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت 10 درصد مبلغ Aباشد؟

X را سود شرکت در نظر مي‌گيريم.

X	B-A	B
P(X)	P	1-P

$$E(X)=\frac{10}{100}A\Rightarrow(B-A)P+B-BP=\frac{10}{100}A\Rightarrow B=(P+\frac{10}{100})A$$

28. یک نمونه 3 تايي از قطعات داخل جعبه‌اي که شامل 20 قطعه است و 4 تاي آنها معیوب هستند را انتخاب مي‌کنيم. اميد رياضي تعداد قطعات معيوب داخل نمونه را به دست آوريد.

تعداد قطعات معیوب انتخاب شده است و دارای توزیع فوق هندسی می باشد و بنابراین

$$E(X)=nP=3\times\frac{4}{20}=0.6$$

29. براي خرابي یک دستگاه دو عامل تعيين شده است. براي تشخيص عامل اول C_1 ريال هزينه مي‌شود و اگر عامل خرابي همان عامل اول باشد با هزينه R_1 ريال رفع مي‌گردد. به طور مشابه اين هزينه‌ها براي عامل دوم C_2 و R_2 ريال هستند. اگر p و 1-p نشان دهنده احتمالهاي خرابي توسط عاملهاي 1 و 2 باشند. با اعمال چه شرايطي روي p، R_i و C_i ($i = 1، 2$) بايد ابتدا عامل اول و سپس عامل دوم را کنترل نمود (در مقابل کنترل عامل دوم و سپس عامل اول) تا اينکه ميزان هزينه برگشت دستگاه به حالت عادي کار کردن حداقل شود.

تذکر: اگر اولين کنترل منفي باشد، بايد دومين کنترل نيز انجام گيرد.

X: هزينه تعمير

اگر ابتدا عامل اول را بررسي کنيم

$$E(X)=P(C_1+R_1)+(1-P)[C_1+C_2+R_2]=PR_1+C_1+C_2+R_2-PC_2-PR_2$$

اگر ابتدا عامل دوم را بررسي کنيم:

$$E(X)=(1-P)(C_2+R_2)+P[C_1+C_2+R_1]=C_2+R_2-PR_2+PC_1+PR_1$$

مي‌خواهيم اولي کمتر از دومي باشد

$$PR_1+C_1+C_2+R_2-PC_2-PR_2<C_2+R_2-PR_2+PC_1+PR_1$$
$$\Rightarrow (1-P)C_1-PC_2<0$$

30. شخصي یک سکه سالم را آنقدر پرتاب مي‌کند تا براي اولين مرتبه خط ظاهر شود. اگر در n امين پرتاب خط ظاهر شود وي 2^n دلار جايزه مي‌برد. فرض کنيد X نشان دهنده ميزان جايزه شخص باشد نشان دهيد که $E[X]=\infty$ است، اين مسأله به « پارادوکس سنت پترزبورگ» مشهور است.

الف) آيا مايل هستيد که مبلغ یک ميليون دلار براي یک مرتبه انجام اين بازي بپردازيد؟

ب) آيا مايل هستيد که مبلغ یک ميليون دلار را براي هر مرتبه بازي بپردازيد در صورتي که تا زماني که مايل باشيد بتوانيد بازي را ادامه دهيد و فقط زمان توقف را تعيين نماييد.

اگر در اولین پرتاب خط ظاهر شود او دو دلار جایزه می گیرد اگر در دومین پرتاب خط ظاهر شود او 2^2 دلار جایزه می گیرد $P(HT)=\frac{1}{4}$ و به همین ترتیب بنابراین

X	2	2^2	2^3	2^4	…
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	…

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}2^i\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}1=\infty$$

الف) برای انجام یک بازی باید احتمال پیروزی خود را در نظر بگیریم حال با توجه به اینکه برای انجام این بازی احتیاج به یک میلیون دلار پول است بنابراین زمانی این بازی دارای ارزش اقتصادی است که احتمال برد بیشتر از یک میلیون دلار حداقل 0.5 باشد بنابراین باید احتمال اینکه $X<2^{19}$ باشد را به دست آوریم

$$P(X<2^{19})=\sum_{i=1}^{19}\frac{1}{2^i}\cong 1$$

با توجه به اینکه این مقدار تقریباً برابر 1 است بنابراین شکست در این بازی اجتناب ناپذیر است. بنابراین مایل به چنین پرداختی نیستیم.

31. هر شب هواشناسهاي متفاوت احتمال اینکه روز بعد باران بیاید را اعلام ميكنند. براي قضاوت میزان صحت پیش‌بیني آنها به هر یک از آنها امتیازهایي به شرح زیر اختصاص ميدهیم. اگر هواشناسي بگوید که فردا با احتمال p باران ميآید آنگاه امتیاز او عبارت است از

اگر باران ببارد $1-(1-p)^2$

اگر باران نبارد $1-p^2$

سپس امتیازهاي او را براي یک مدت معین جمع‌آوري نموده و فردي که بالاترین امتیاز را کسب کرده باشد بهترین هواشناس شناخته ميشود. فرض کنید یک هواشناس از این مطلب اطلاع دارد و بنابراین ميخواهد امید ریاضي امتیاز خود را حداکثر نماید. اگر این فرد واقعاً معتقد باشد که فردا با احتمال p^* باران ميبارد، p را چه مقدار باید اعلام کند تا امید ریاضي امتیاز او حداکثر شود؟

X: امتیازات شخص

$$E(X)=P^*[1-(1-P)^2]+(1-P^*)(1-P^2)=2PP^*+1-P^2-P^*$$

حال نسبت به P مشتق ميگیریم

$$\frac{\partial E(X)}{\partial P}=2P^*-2P$$

مشتق دوم برابر با 2- است بنابراین در این نقطه ماکزیمم ميشود در نتیجه

$$2P^*=2P\Rightarrow P=P^*$$

بنابراین بهتر است p^* اعلام کند.

32. براي بررسي اینکه یک گروه 100 نفري داراي بیماري معیني هستند یا خیر آنها را مورد آزمایش خون قرار ميدهیم بدین ترتیب که آنها را در گروههاي 10 نفري تقسیم نموده و نمونه خون هر 10 نفر را با هم و به طور یکجا آزمایش ميکنیم. اگر نتیجه آزمایش منفي باشد یک آزمایش براي این 10 نفر کافي بوده است در حالي که اگر نتیجه مثبت باشد هر کدام از افراد به طور جداگانه نیز آزمایش ميشوند و جمعاً 11 آزمایش انجام ميگیرد. فرض کنید احتمال اینکه فردي این بیماري را داشته باشد براي همه افراد به طور مستقل برابر با 0.1 باشد. امید ریاضي تعداد آزمایشهاي لازم براي هر گروه را به دست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتي نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر داراي بیماري است.)

اگر Xرا برابر با تعداد آزمایشهای لازم برای یک گروه در نظر بگیریم آن گاه X می تواند عدد 1 یا 11 را اختیار نماید. زمانی عدد 1 را اختیار می کند که نتیجه آزمایش هر ده نفر منفی باشد بنابراین احتمال آن برابر با 0.9^{10} است و زمانی X برابر با 11 می شود که حداقل یکی از آنها دارای بیماری باشد که احتمال آن برابر با $1-(0.9)^{10}$ است.

X	1	11
P(X)	0.9^{10}	$1-0.9^{10}$

$$E(X)=(0.9)^{10}+11[1-(0.9)^{10}]=11-10(0.9)^{10}$$

33. یک پسر بچه روزنامه فروش روزنامه‌ها را 10 سنت خریداري ميکند و 15 سنت به فروش ميرساند و مجاز نیست که روزنامه‌هاي به فروش نرسیده را برگشت دهد. اگر تقاضاي روزنامه مشتریان داراي توزیع دو جمله‌اي با پارامترهاي $n=10$ و $p=\frac{1}{3}$ باشد. تقریباً چه تعداد روزنامه باید خریداري کند تا سود او حداکثر گردد؟

$$E(X)=10\times\frac{1}{3}=3.33$$

با توجه به اینکه انتظار داریم تقریباً 3 نفر از وی خرید کنند بنابراین او باید 3 روزنامه خریداری کند تا سودش حداکثر گردد.

34. *

35. جعبه‌اي شامل 5 مهره قرمز و 5 مهره آبي است، دو مهره را به تصادف خارج مي‌كنيم. اگر مهره‌ها از يک رنگ باشند آنگاه 1.1 دلار جايزه مي‌گيريم و اگر از رنگهاي متفاوت باشند 1 دلار جريمه مي‌شويم مطلوب است

الف) اميد رياضي مبلغي كه برنده مي‌شويم.

ب) واريانس مبلغي كه برنده مي‌شويم.

اگر X مقدار مبلغي باشد كه برنده مي‌شويم آنگاه X داراي تابع احتمال زير است.

X	1.1	-1
P(X)	$\frac{20}{45}$	$\frac{25}{45}$

$E(X) = -0.067, Var(X) = 1.089$

36. *

37. مقدار Var(X) و Var(Y) را براي متغيرهاي تصادفي X و Y داده شده در مسأله 21 بدست آوريد.

$Var(X) = 82.5, Var(Y) = 84.5$

38. اگر E[X]=1 و Var(X)=5 باشد مطلوب است

الف) $E[(2+X)^2]$

ب) $Var(4+3X)$

$$E(X^2) = Var(X) - [E(X)]^2 = 5 - 1 = 4$$
$$E[(2+X)^2] = E[4+4X+X^2] = 4 + 4E(X) + E(X^2) = 12$$
$$Var(4+3X) = 9Var(X) = 45$$

39. توپي را به تصادف از ظرفي كه شامل 3 توپ سفيد و 3 توپ سياه است انتخاب مي‌كنيم. بعد از انتخاب توپ آن را به ظرف برگردانده و توپ ديگري را انتخاب مي‌كنيم، اين كار را به طور نامحدود تكرار مي‌كنيم. احتمال اينكه از 4 توپ انتخاب شده اول 2 توپ سفيد باشد را به دست آوريد.

$$\binom{4}{2}\left(\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\right) = \frac{3}{8}$$

40. در يک امتحان تستي 3 جوابي با 5 سؤال، احتمال اينكه دانشجويي با حدس زدن تصادفي پاسخها حداقل 4 سؤال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

اگر Xتعداد پاسخ های صحیح باشدبا توجه به اینکه به سوالات به صورت تصادفی پاسخ می دهد بنابراین $P = \frac{1}{3}$ و

با فرض اینکه بین سوالات استقلال وجود دارد در نتیجه X دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای n=5 و $P = \frac{1}{3}$ است بنابراین

$$P(X \ge 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{11}{243}$$

41. مردي مدعي است كه تيز هوشي خارق‌العاده‌اي دارد. براي آزمايش كردن او يک سكه منظم را 10 مرتبه پرتاب مي‌كنيم و از او مي‌خواهيم نتايج را قبل از آزمايش پيش‌بيني كند. او حداقل 7 نتيجه از 10 نتيجه را درست حدس مي‌زند. احتمال اينكه وي بدون داشتن خصوصيت تيز هوشي بتواند چنين پيش‌بيني را انجام دهد، چقدر است؟

X: تعداد دفعاتي كه درست حدس مي‌زند. X داراي توزيع دوجمله‌اي با پارامترهاي n=10 و $P = \frac{1}{2}$ است.

$$P(X \ge 7) = \sum_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.172$$

42. فرض كنيد موتورهاي هواپيما در حال پرواز با احتمال 1-p مستقل از يكديگر خراب مي‌شوند. اگر در يک پرواز موفقيت‌آميز لازم باشد اكثريت موتورهاي هواپيما سالم باشند براي چه مقداري از p، يک هواپيماي 5 موتوره مطمئن‌تر از يک هواپيمای 3 موتوره است؟

اگرX را تعداد موتورهای سالم هواپیما در نظر بگیریم.برای اینکه یک هواپیمای 3 موتوره کار کند باید حداقل 2 موتور از آن کار کند.

$$A = p(X \ge 2) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

برای اینکه یک هواپیمای 5 موتوره کار کند باید حداقل 3 موتور از آن کار کند.

$$B = p(X \ge 3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 = 6p^5 - 15p^4 + 10p^3$$

حال قصد داریم هواپیمای 5 موتوره مطمئن تر از هواپیمای 3 موتوره باشد بنابراین

$$A > B \Rightarrow 6p^5 - 15p^4 + 10p^3 > 3p^2 - 2p^3 \Rightarrow 6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 > 0$$

43. یک کانال مخابراتي اعداد 0 و 1 را انتقال مي‌دهد، به دلیل اشکالات موجود با احتمال 0.2 عدد انتقال داده شده اشتباه دریافت مي‌شود. فرض کنید مي‌خواهیم یک پیام مهم که شامل یک عدد دودویي است را ارسال کنیم و براي کاهش شانس خطا به جاي 0 عدد 00000 و به جاي 1 عدد 11111 ارسال گردد. اگر دریافت کننده پیام با استفاده از اکثریت اعداد رسیده آن را بخواند. احتمال اینکه پیام اشتباه خوانده شود چقدر است؟ چه فرض استقلالي را در نظر مي‌گیرید؟

A و B به ترتیب پیشامد اینکه صفر یا یک اشتباه دریافت شود. X و Y به ترتیب تعداد دفعاتي که صفر و یک اشتباه دریافت مي‌شود.

براي اینکه یک پیام اشتباه دریافت شود باید صفر یا یک یا هر دو اشتباه دریافت شود.

$$P(A) = P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= (0.2)^3 (0.8)^2 \binom{5}{3} + (0.2)^4 (0.8) \binom{5}{4} + (0.2)^5 = 0.0579$$

$$P(B) = P(Y \ge 3) = 0.0579$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.1124$$

فرض مي‌کنیم A و B مستقل هستند.

44. یک سیستم ماهواره‌اي از n جزء ساخته شده که اگر حداقل k جزء از آنها کار کند آنگاه سیستم فعال خواهد بود. در یک روز باراني هر یک از اجزاء مستقل از یکدیگر با احتمال p_1 کار مي‌کنند در حالي که در یک روز غیر باراني هر کدام مستقل از یکدیگر با احتمال p_2 کار خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با α باشد احتمال اینکه ماهواره کار کند چقدر است؟

در اینجا قصد داریم احتمال کار کردن سیستم را به دست آوریم و با توجه به صورت مسئله دو حالت بارانی و غیر بارانی وجود دارد که در هر قسمت X (تعداد اجزای که کار می کند) دارای توزیع دوجمله ای با پارامترهای خاص خود است.

$$P(X \ge k) = P(X \ge k \mid A)P(A) + P(X \ge k \mid A^c)P(A^c)$$

$$= \alpha \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} P_1^x (1-P_1)^{n-x} + (1-\alpha) \sum_{x=k}^{n} \binom{n}{x} P_2^x (1-P_2)^{n-x}$$

45. دانشجویي در حال آماده شدن براي شرکت در یک امتحان شفاهي است و اینکه روز امتحان «خوش‌شانس» یا «بدشانس» باشد برایش اهمیت دارد. او محاسبه کرده‌است که در روز خوش‌شانسي هر یک از ممتحنین به طور مستقل با احتمال 0.8 او را قبول مي‌کنند و در روز بدشانسي این احتمال به 0.4 کاهش مي‌یابد. فرض کنید که براي قبول شدن باید اکثریت ممتحنین او را قبول کنند. اگر دانشجو احساس کند که روز امتحان، امکان بدشانس بودن او دو برابر خوش شانس بودنش است، آیا باید تقاضاي امتحاني با 3 ممتحن و یا تقاضاي با 5 ممتحن را داشته باشد؟

A و B به ترتیب پیشامد خوش‌شانس بودن و قبول شدن توسط یک ممتحن است و X تعداد ممتحنیني است که او را قبول مي‌کنند.

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B \mid A) = 0.8, P(B \mid A^c) = 0.4$$

اگر تقاضاي 3 ممتحن کند براي قبول شدن باید $X \ge 2$ باشد.

$$P(X \ge 2) = P(X \ge 2 \mid A)P(A) + P(X \ge 2 \mid A^c)P(A^c) =$$

$$= \{P(x = 2 \mid A) + P(X = 3 \mid A)\}P(A) + \{P(x = 2 \mid A^c) + P(X = 3 \mid A^c)\}P(A^c)$$

$$= \{\binom{3}{2}(0.8)^2(0.2) + (0.8)^3\}\frac{1}{3} + \{\binom{3}{2}(0.4)^2(0.6) + (0.4)^3\}\frac{2}{3} = 0.534$$

اگر تقاضاي 5 ممتحن کند براي قبول شدن باید $X \ge 3$ باشد.

$$P(X \ge 3) = \{\binom{5}{3}(.8)^3(.2)^2 + \binom{5}{4}(.8)^4(.2) + (.8)^5\}\frac{1}{3} + \{\binom{5}{3}(.4)^3(.6)^2 + \binom{5}{4}(.4)^4(.6) + (.4)^5\}\frac{2}{3}$$
$$= 0.526$$

بنابراين با توجه به اينكه براي n=3 احتمال قبول شدن بيشتر است تقاضاي 3 ممتحن ميكنيم.

46. فرض كنيد براي محكوم كردن يک متهم لازم است كه حداقل 9 نفر از 12 نفر اعضاء هيئت منصفه رأي به مجرم بودن او بدهند. همچنين فرض كنيد احتمال اينكه يک عضو هيئت منصفه متهم گناهكاري را بيگناه تشخيص دهد برابر با 0.2 و احتمال اينكه متهم بيگناهي را گناهكار تشخيص دهد برابر با 0.1 باشد. اگر هر عضو به طور مستقل رأي بدهد و 65 درصد از متهمين گناهكار باشند، احتمال اينكه هيئت منصفه رأي صحيح بدهد را به دست آوريد. چه درصدي از متهمين گناهكار شناخته ميشوند؟

اگر از A و B و D به ترتیب برای نشان دادن پیشامد اینکه متهم گناهکار است، عضو هیئت منصفه متهم را گناهکار تشخیص دهد و هیات منصفه رای صحیح بدهد و X تعداد افرادی که متهم را گناهکار تشخیص می دهند باشد آنگاه برای اینکه هیات منصفه رای صحیح بدهد باید اگر متهم گناهکار است حداقل 9 نفر رای به گناهکاری او بدهند و اگر بی گناه است حداکثر 8 نفر رای به گناهکاری او بدهند. با توجه به اینکه هر نفر مستقل رای می دهد بنابراین X دارای توزیع دو جمله ای می باشد.

$$P(D) = P(X \ge 9 \mid A)P(A) + P(X \le 8 \mid A^c)P(A^c)$$

$$P(X \ge 9 \mid A) = \sum_{i=9}^{12}\binom{12}{i}(0.8)^i(0.2)^{12-i} = 0.795$$

$$P(X \le 8 \mid A) = \sum_{i=0}^{8}\binom{12}{i}(0.1)^i(0.9)^{12-i} = 1$$

$$P(D) = (0.795)(0.65) + 0.35 = 0.86675$$

در این قسمت احتمال اینکه C متهمی گناهکار تشخیص داده شود را به دست می آوریم

$$P(C) = P(X \ge 9 \mid A)P(A) + P(X \ge 9 \mid A^c)P(A^c)$$
$$= (0.65)\sum_{i=9}^{12}\binom{12}{\text{i}}(0.8)^i(0.2)^{12-i} + (0.35)\sum_{i=9}^{12}\binom{12}{\text{i}}(0.1)^i(0.9)^{12-i} = 0.51675$$

47. در بعضي از محاكمههاي نظامي 9 قاضي را دعوت ميكنند و وكلاي مدافع متهم و شاكي ميتوانند با هر قاضي مبارزه نموده در صورتي كه موفق شوند او از جمع قضات كم شده و كسي جايگزين وي نميشود. در پايان متهمي را مجرم ميشناسند كه اكثريت قضات رأي به مجرم بودن او بدهند و در غير اين صورت متهم بيگناه شناخته ميشود. فرض كنيد وقتي كه متهم واقعاً مجرم است هر قاضي به طور مستقل با احتمال 0.7 رأي به گناهكاري او بدهد و اين احتمال براي متهمي كه بيگناه است به 0.3 كاهش يابد.

الف) احتمال اينكه يک متهم مجرم، گناهكار تشخيص داده شود را در حالات 9 قاضي، 8 قاضي و 7 قاضي به دست آوريد.

ب) بند (الف) را براي يک متهم بيگناه محاسبه كنيد.

A و B را به ترتیب پیشامد واقعاً مجرم بودن و متهم شناخته شدن توسط یک قاضی در نظر میگیریم. X تعداد قاضیهای که او را گناهکار تشخیص دهند.

$$P(B \mid A) = 0.7, P(B \mid A^c) = 0.3$$

(الف) در حالت 9 قاضی:
$$P(X \ge 5) = \sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}(0.7)^i(0.3)^{9-i} = 0.901$$

در حالت 8 قاضی:
$$P(X \ge 5) = \sum_{i=5}^{8}\binom{8}{i}(0.7)^i(0.3)^{8-i} = 0.806$$

در حالت 7 قاضی:
$$P(X \ge 4) = \sum_{i=4}^{7}\binom{7}{i}(0.7)^i(0.3)^{7-i} = 0.874$$

(ب) در حالت 9 قاضی:
$$P(X \ge 5) = \sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}(0.3)^i(0.7)^{9-i} = 0.099$$

در حالت 8 قاضی:
$$P(X \ge 5) = \sum_{i=5}^{8}\binom{8}{i}(0.3)^i(0.7)^{8-i} = 0.058$$

در حالت 7 قاضی:
$$P(X \geq 4) = \sum_{i=4}^{7} \binom{7}{i} (0.3)^i (0.7)^{7-i} = 0.126$$

48. تجربه نشان داده است که دیسکتهاي کامپیوتري تولید شده توسط یک شرکت با احتمال 0.01 مستقل از یکدیگر معیوب هستند.شرکت دیسکتها را در بستههاي 10 تایي به فروش ميرساند و پیشنهاد باز پرداخت پول را با شرط مشاهده حداکثر یک معیوب در هر بسته ارائه ميدهد. اگر فردي سه بسته از این دیسکتها را خریداري کند احتمال اینکه او یک بسته را برگرداند چقدر است؟

ابتدا احتمال اینکه بسته پس داده شود را به دست می آوریم. اگر X تعداد دیسکتهای معیوب در بسته ده تایی باشد.
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.99)^{10} = 0.096$$
اگر Y را برابر با تعداد بستههای برگردانده شده در نظر بگیریم Y دارای توزیع دوجملهای با $n = 3$ و $p = 0.096$ است درنتیجه
$$P(Y = 1) = \binom{3}{1} (0.096)(0.904)^2 = 0.2354$$

49. فرض کنید که 10 درصد از تراشههاي کامپیوتري تولید شده توسط یک شرکت تولید کننده سختافزار معیوب باشند. اگر 100 تراشه سفارش بدهیم، آیا تعداد تراشههاي معیوبي را که دریافت ميداریم یک متغیر تصادفي دوجملهاي است؟

خیر، زیرا در بین این 100تراشه دیگر استقلال وجود ندارد و احتمال با هر انتخاب تغییر میکند.

50. فرض کنید یک سکه اریب با احتمال p شیر ظاهر ميشود. این سکه را 10 مرتبه پرتاب ميکنیم اگر بدانیم که 6 شیر ظاهر شده است. احتمال شرطي اینکه نتیجه سه پرتاب اول به صورتهاي زیر باشد را به دست آورید.

الف) H، T و T باشد (یعني اولین پرتاب شیر، و دو پرتاب بعدي خط باشند.)

ب) T، H و T باشد.

اگر X را تعداد شیرها در نظربگیریم، دارای توزیع دوجمله ای می باشد.

الف) با توجه به اینکه سه پرتاب اول به صورت HTT بوده و کلاً 6 شیر ظاهر شده است بنابراین از 7 آزمایش باقی مانده 5 نتیجه شیر است که این به $\binom{7}{5}$ طریق امکان پذیر است.
$$P(HTT \mid X = 6) = \frac{P(HTT \cap X = 6)}{P(X = 6)} = \frac{P^6 (1-P)^4 \binom{7}{5}}{P^6 (1-P)^4 \binom{10}{6}} = \frac{1}{10}$$
ب)
$$P(THT \mid X = 6) = \frac{P(THT \cap X = 6)}{P(X = 6)} = \frac{P^6 (1-P)^4 \binom{7}{5}}{P^6 (1-P)^4 \binom{10}{6}} = \frac{1}{10}$$

51. متوسط تعداد اشتباهات تایپي در یک صفحه از یک مجله برابر با 0.2 است. مطلوب است احتمال اینکه صفحه بعدي این مجله را که مطالعه ميکنید شامل

الف) صفر اشتباه تایپي باشد.

ب) 2 یا بیش از 2 اشتباه تایپي باشد.

دلیل خود را شرح دهید!

X: تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه. X دارای توزیع پواسون با $\lambda = 0.2$ است.

(الف)
$$P(X = 0) = e^{-0.2}$$
(ب)
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.2e^{-0.2} - e^{-0.2} = 1 - e^{-0.2}(1.2)$$

52. متوسط تعداد هواپیماهاي مسافربري که در ماه دچار حادثه ميشوند در سطح جهان برابر با 3.5 هواپیما است. احتمال پیشامدهاي زیر را به دست آورید.

الف) در ماه آینده حداقل دو حادثه اتفاق افتد.

ب) حداکثر یک حادثه در ماه آینده اتفاق افتد.

Xتعداد حوادث در ماه

الف) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 4.5e^{-3.5}$

ب) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 4.5e^{-3.5}$

53. در ايالت نيويورک تقريباً 80000 ازدواج در سال گذشته انجام گرفته است. احتمال پيشامدهاي زير را براي حداقل يک زوج برآورد نماييد.

الف) هر دو در روز 30 اوريل به دنيا آمده باشند.

ب) هر دو در يک روز از سال به دنيا آمده باشند؟ فرضهاي خود را بيان کنيد.

الف) ابتدا احتمال را براییک زوج خاص به دست می‌آوریم اگر A را پیشامد اینکه مرد در 30 آوریل به دنیا آمده و B را پیشامد اینکه زن در 30 آوریل به دنیا آمده در نظر بگیریم

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} = (\frac{1}{365})^2$$

و اگر X تعداد زوجهای که هر دو در 30 آوریل بدنیا آمده‌اند باشد X دارای توزیع دوجمله‌ای است که می‌توان آنرا با توزیع پواسون تقریب زد.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.6}$$

ب) ابتدا احتمال را براییک زوج خاص به دست می‌آوریم.

$$P(C) = \frac{365}{365} \times \frac{1}{365} = \frac{1}{365}$$

اگر Y را تعداد زوجهایی که هر دو در یک روز سال به دنیا آمده‌اند در نظر بگیریم Y نیز دارای توزیع دوجمله‌ای است که می‌توان آنرا با توزیع پواسون تقریب زد.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-219.18}$$

54. فرض کنيد متوسط تعداد خودروهايي که در هفته در يک بزرگراه خراب مي‌شوند برابر با 2.2 باشد. احتمال پيشامدهاي زير را تقريب بزنيد.

الف) هيچ خودرويي در هفته آينده خراب نشود.

ب) حداقل 2 خودرو در هفته آينده خراب شوند.

الف) $P(X = 0) = e^{-2.2}$

ب) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 3.2e^{-2.2}$

55. يک مؤسسه انتشاراتي 2 ماشين‌نويس جديد استخدام مي‌کند. ماشين‌نويس اول به طور متوسط در هر مقاله 3 غلط و ماشين‌نويس دوم به طور متوسط 4.2 غلط تايپي دارند. اگر مقاله شما با شانس برابر توسط يکي از دو ماشين‌نويس تهيه شود. احتمال اينکه مقاله هيچ غلط تايپي نداشته باشد را به دست آوريد.

A و B به ترتیب پیشامد اینکه تایپ توسط ماشین‌نویس اول و دوم انجام شود. X تعداد غلطهای تایپی موجود در مقاله است.

$$P(X = 0) = P(X = 0 \mid A)P(A) + P(X = 0 \mid B)P(B)$$

می‌دانیم $P(X \mid A)$ دارای توزیع پواسون با $\lambda = 3$ و $P(X \mid B)$ دارای توزیع پواسون با $\lambda = 4.2$ است. در نتیجه داریم:

$$P(X = 0) = (e^{-3} + e^{-4.2})\frac{1}{2}$$

56. چند نفر لازم است تا احتمال اينکه حداقل يکي از آنها در روز تولد شما به دنيا آمده باشد بيش از $\frac{1}{2}$ شود؟

احتمال اینکه افراد در یک روز خاص به دنیا بیایند برابر با $\frac{1}{365}$ است. اگر X راتعداد افرادی که در روز تولد شما به دنیا آمده اند در نظر بگیریم X دارای توزیع دوجمله ای با $P = \frac{1}{365}$ است.

$$P(X > 1) > \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - P(X = 0) > \frac{1}{2} \Rightarrow P(X = 0) < \frac{1}{2} \Rightarrow \binom{n}{0}(\frac{1}{365})^0(\frac{364}{365})^n < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{364}{365})^n < \frac{1}{2} \Rightarrow n = 253$$

57. فرض کنيد تعداد حوادثي که در يک بزرگراه در روز اتفاق مي‌افتد يک متغير تصادفي پواسون با پارامتر $\lambda = 3$ باشد.

الف) احتمال اينکه امروز حداقل 3 حادثه اتفاق افتد را به دست آوريد.

ب) بند (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرار کنید.

(الف) $P(X \geq 3) = 1 - [P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)] = 1 - e^{-3}(\frac{17}{2}) = 0.577$

(ب) $P(X \geq 3 \mid X \neq 0) = 1 - [P(X=2) + P(X=1)] = 1 - e^{-3}(7.5) = 0.627$

58. *

59. اگر بلیط شرکت در یک بازي را براي انجام 50 بازي خريداري كنيد و در هر بازي، شانس برنده شدن شما 0.01 باشد. احتمال تقريبي برنده شدن را در حالات زیر به دست آورید.

الف) حداقل یک مرتبه

ب) یک مرتبه

ج) حداقل دو مرتبه

با توجه به فرضیات مسأله X دارای توزیع پواسون با $\lambda = 0.5$ است.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5} = 0.3935$

$P(X=1) = (0.5)e^{-0.5} = 0.303$

$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=1) + P(X=0)] = 1 - (1.5)e^{-0.5} = 0.0902$

60. تعداد دفعاتي كه يک فرد در سال دچار سرماخوردگي مي‌شود يک متغير تصادفي پواسون با پارامتر $\lambda = 5$ است. فرض كنيد داروي جديدي كه مقدار زيادي ويتامين C دارد تهيه شده به طوري كه پارامتر پواسون را براي 75 درصد جامعه به $\lambda = 3$ كاهش مي‌دهد و براي بقيه 25 درصد هيچ تأثيري ندارد. اگر فردي دارو را استفاده كرده و دو مرتبه سرماخوردگي داشته باشد با چه احتمالي دارو براي او مؤثر بوده است؟

Xتعداد دفعات سرماخوردگی و A پیشامد اینکه دارو تاثیر داشته باشد.

$$P(A \mid X=2) = \frac{P((X=2) \cap A)}{P(X=2)} = \frac{P(X=2 \mid A)P(A)}{P(X=2)} =$$

$$P(X=2) = P(X=2 \mid A)P(A) + P(X=2 \mid A^c)P(A^c) = (0.75)\frac{e^{-3}}{2} + (0.25)\frac{25e^{-5}}{2}$$

61.*

62. *

63. افراد با نرخ 1 نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می‌شوند.

الف) احتمال اینکه هیچ‌کس در فاصله 12:00 تا 12:05 وارد نشود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل 4 نفر در آن زمان وارد فروشگاه شوند را به دست آورید.

یک نفر در هر دو دقیقه یعنی به طور متوسط 0.5 در هر دقیقه وارد فروشگاه می‌شوند.

(الف) برای 5 دقیقه پارامتر برابر با $\lambda = 5 \times 0.5 = 2.5$ است.

$P(X=0) = e^{-2.5} = 0.0821$

(ب) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.2424$

64. نرخ خودكشي در یک ايالت آمريكا برابر با 1 خودكشي در هر 100000 نفر در ماه گزارش شده است.

الف) احتمال اینکه در یک شهر 400000 نفري آن ايالت حداقل 8 خودكشي در ماه اتفاق افتد را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه براي حداقل 2 ماه از سال، در هر ماه حداقل 8 خودكشي باشد را به دست آورید.

ج) اگر ماه فعلي را شماره 1 بناميم احتمال اینکه اولين ماهي كه حداقل 8 خودكشي وجود دارد ماه شماره i باشد را به دست آورید. چه فرضهايي را در نظر گرفته‌اید؟

و اگر X را تعداد خودکشی در ماه در نظر بگیریم X دارای توزیع دوجمله‌ای است که می‌توان آنرا با توزیع پواسون تقریب زد

$\lambda = 4, P_1 = P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

ب) اگر Y را تعداد ماههایی در نظر بگیریم که در آنها حداقل 8 خودکشی انجام می‌شود آنگاه Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = 12, p = P_1$ است.

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(X=1) + P(X=0)]$

ج) در این قسمت مشاهده حاقل 8 خودکشی را به عنوان موفقیت در نظر می‌گیریم و بنابراین Z دارای توزیع هندسی است. فرض می‌کنیم که خودکشی ماههای سال از هم مستقل هستند.

65. هر یک از 500 سرباز یک پادگان، مستقل از يكديگر با احتمال 0.001 داراي بيماري خاصي هستند. اين بيماري را مي‌توان با آزمايش خون تشخيص داد و براي سهولت نمونه خون 500 سرباز را مخلوط نموده و آزمايش مي‌كنند.

الف) احتمال تقريبي اينكه نتيجه آزمايش مثبت باشد، يعني حداقل يک نفر داراي بيماري باشد را به دست آوريد.
ب) اگر نتيجه آزمايش مثبت باشد. احتمال اينكه بيش از يک نفر بيمار باشند چقدر است؟
ج) اگر يكي از سربازها بداند كه بيمار است، وي در مورد احتمال اينكه بيش از يک نفر بيمار باشند چه ايده‌اي دارد؟
چون نتيجه آزمايش خونهاي مخلوط شده مثبت است، مسؤلين تصميم مي‌گيرند كه افراد را به طور جداگانه مورد آزمايش قرار دهند. نتيجه اولين i-1 آزمايش منفي و i امين آزمايش كه روي فرد مورد نظر انجام گرفت نتيجه‌اش مثبت بود.

(الف) $\lambda = 500\times 0.001 = 0.5$

$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 0.3935$

(ب) اگر نتيجه آزمايش مثبت باشد يعنی $X \ge 1$ است.

$$P(X \ge 2 \mid X \ge 1) = \frac{P((X \ge 2) \cap (X \ge 1))}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X \ge 2)}{P(X \ge 1)} = \frac{0.0902}{0.3935} = 0.2292$$

(ج) خود شخص می‌داند بيمار است بنابراين او را از گروه خارج می‌كنيم و احتمال اينكه $X \ge 1$ باشد را به دست می‌آوريم. $\lambda = 499\times 0.001 = .499$

$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 0.393$

66. يک گردونه بازي كه شامل 38 عدد به صورت اعداد 0 تا 36 و عدد 00 (دو صفر) است را در نظر بگيريد. اگر فردي همواره روي يكي از نتايج 1 تا 12 شرطبندي كند، احتمال پيشامدهاي زير را به دست آوريد.
الف) 5 شرط اوليه را ببازد.
ب) اولين برد او در چهارمين شرطبندي اتفاق افتد.

احتمال پيروزی برابر $\frac{26}{38}$ است

الف)
$$P(A) = \frac{26}{38}\times\frac{26}{38}\times\frac{26}{38}\times\frac{26}{38}\times\frac{26}{38} = 0.15$$

ب) يعنی نتيجه 3 بازی اول باخت و بازی چهارم برد باشد.

$$P(B) = \frac{26}{38}\times\frac{26}{38}\times\frac{26}{38}\times\frac{12}{38} = 0.1012$$

67. دو تيم ورزشي يک سري بازي انجام مي‌دهند و اولين تيمي كه 4 مرتبه برنده شود به عنوان برنده نهايي انتخاب مي‌شود. فرض كنيد يكي از تيمها قوي‌تر از ديگري است به طوري كه احتمال برد آن در هر بازي مستقل از بازيهاي ديگر برابر با 0.6 است. احتمال اينكه تيم قوي‌تر i بازي را ببرد به دست آوريد. اين احتمال را براي 7، 6، 5، i=4 محاسبه كنيد. احتمال برنده نهايي شدن تيم قوي‌تر را با احتمال اينكه آن تيم 2 بازي از 3 بازي را ببرد مقايسه كنيد.
ابتدا احتمال اينكه تيم قوی‌تر در $i,(i = 4,5,6,7)$ امين بازی برنده نهايی شود برابر $P(X = i) = \binom{i-1}{3}(0.6)^4(0.4)^{i-4}$ است.

$$P(X = 4) = 0.1296, P(X = 5) = 0.20736, P(X = 6) = 0.20736, P(X = 7) = 0.1659$$

برنده شدن در يكی از مراحل فوق اتفاق می‌افتد بنابراين احتمال مورد نظر از جمع احتمالهای فوق به دست می‌آيد و برابر 0.71022 است.

68. در مسأله 67 فرض كنيد كه دو تيم با هم بازي كرده و احتمال برد هر تيم $\frac{1}{2}$ باشد. در اين صورت اميد رياضي تعداد بازيها را به دست آوريد.
اگر X تعداد بازيها باشد. بازيها زمانی متوقف می‌شود كه تيم A يا تيم B برنده شود و با توجه به اينكه $p = 0.5$ بنابراين برای محاسبه هر قسمت تنهاكافی است احتمال برنده شدن A را به دست آورده و در 2 ضرب كنيم.

X	4	5	6	7
P(X)	$\frac{2}{16}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{40}{128}$

و در نتيجه $E(X) = \frac{69}{128}$ است.

69. به خبرنگاري ليست افراد با نفوذي را داده‌اند كه بايد با آنها مصاحبه كند. اگر خبرنگار لازم باشد كه با 5 نفر مصاحبه كند و هر فرد به طور مستقل با احتمال $\frac{2}{3}$ موافقت نمايد كه با او مصاحبه شود. احتمال اينكه ليست وي قادر به تأمين افراد مورد نياز باشد را در هر يک از حالات زير به دست آوريد.

الف) ليست شامل 5 نفر باشد.

ب) ليست شامل 8 نفر باشد.

براي بند (ب) احتمال اينكه خبرنگار بتواند با ج) 6 نفر، د) 7 نفر از افراد ليست مصاحبه كند چقدر است؟

(الف) باید به 5 پیروزی برسد و با توجه به اینکه در این قسمت n=5 است بنابراین

$$P(X=5)=\binom{5}{5}(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3})^0=(\frac{2}{3})^5$$

(ب) n=8 :

$$P(X\geq 5)=\sum_{i=5}^{8}\binom{8}{i}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{8-i}=\frac{4864}{6561}$$

(ج)

$$P(X\geq 6)=\sum_{i=6}^{8}\binom{8}{i}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{8-i}$$

(د)

$$P(X\geq 7)=\sum_{i=7}^{8}\binom{8}{i}(\frac{2}{3})^i(\frac{1}{3})^{8-i}$$

70. يک سكه منظم را به طور متوالي پرتاب مي‌كنيم تا شير براي دهمين مرتبه ظاهر شود. اگر X نشان دهنده تعداد خطهاي ظاهر شده باشد. تابع احتمال X را به دست آوريد.

Xتعداد شکست ها بنابراین X می‌تواند مقادیر 0، 1، 2، ... را اختیار کند.

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0},P(X=1)=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{1},...,P(X=i)=\binom{10+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

بنابراین X دارای توزیع دو جمله‌ای منفی است.

71. مسأله كبريت باناخ (مثال8-5) را وقتي كه قوطي كبريت طرف چپ او از ابتدا شامل N_1 چوب كبريت و قوطي كبريت سمت راست او N_2 چوب كبريت داشته باشد حل كنيد.

اگر E نشان دهنده ی این باشد که قوطی سمت راست خالی است و در قوطی سمت چپ او k کبریت وجود دارد. این پیشامد اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر N_1+1 امین انتخاب از قوطی کبریت سمت راست در N_1+1+N_2-k امین آزمایش ساده انجام گیرد.

$$n=N_1+1+N_2-k, r=N_1+1, P=\frac{1}{2}$$

$$P(E)=\binom{N_1+N_2-k}{N_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1+N_2-k+1}$$

و F نشان دهنده‌ی این است که قوطی سمت چپ خالی است و در قوطی سمت راست k کبریت وجود دارد. این پیشامد اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر N_2+1 امین انتخاب از قوطی کبریت سمت راست در N_2+1+N_1-k امین آزمایش ساده انجام گیرد.

$$P(F)=\binom{N_1+N_2-k}{N_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1+N_2-k+1}$$

و نتیجه نهایی برابر با P(E)+P(F) است.

72. در مسأله كبريت باناخ احتمال اينكه در لحظه‌اي كه قوطي اول خالي مي‌شود (در مقابل كشف خالي بودن آن)، قوطي ديگر k چوب كبريت داشته باشد را به دست آوريد.

در این مساله زمانی که کبریت آخر را انتخاب می‌کنیم و قوطی خالی می‌شود مد نظر است بنابراین باید N امین انتخاب از قوطی کبریت اول در $(N+N-k)$ امین آزمایش ساده انجام گیرد و در نتیجه

$$P(E)=\binom{2N-k-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}\Rightarrow 2P(E)=\binom{2N-k-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k-1}$$

73. ظرفي شامل 4 توپ سفيد و 4 توپ سياه است. به تصادف 4 توپ از ظرف انتخاب مي‌كنيم اگر 2 توپ سفيد و 2 توپ سياه باشد، آزمايش را متوقف مي‌كنيم در غير اين صورت توپها را به ظرف برگردانده و دوباره 4 توپ به تصادف انتخاب مي‌كنيم. اين آزمايش آنقدر تكرار مي‌شود، تا دقيقاً 2 توپ از 4 توپ سفيد باشد. احتمال اينكه n مرتبه انتخاب توپها صورت پذيرد را به دست آوريد.

A پیشامد این است که 2 توپ سیاه و 2 توپ سفید انتخاب شود.

و اگر X را برابر با تعداد دفعاتی که آزمایش انجام می‌شود تا پیشامد A اتفاق افتد در نظر بگیریم آنگاه X دارای توزیع هندسی است.

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{36}{70}$$

$$P(X=n)=\frac{36}{70}\times(\frac{34}{70})^{n-1}$$

74. فرض كنيد يک محموله 100 تايي كالا شامل 6 كالاي معيوب و 94 كالاي سالم باشد. اگر X نشان دهنده تعداد كالاي معيوب در يک نمونه 10 تايي از محموله باشد مطلوب است

الف) P{X=0} ب) P{X>2}

Xدارای توزیع فوق هندسی است.

$$P(X=0)=\frac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}=0.5223$$

$$p(X>2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}=1-\left[\frac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}+\frac{\binom{6}{1}\binom{94}{9}}{\binom{100}{10}}\right]$$

75. *

76. *

77. يک خريدار قطعات ترانزيستور، آنها را در محموله‌هاي 20 تايي خريداري مي‌كند. سياست او اين است كه از هر محموله 4 قطعه به تصادف انتخاب كرده و اگر همه آنها سالم باشند محموله را مي‌پذيرد. اگر هر قطعه در محموله مستقل از ساير قطعات با احتمال 0.1 معيوب باشد چه نسبتي از محموله‌ها رد مي‌شوند؟

X: تعداد قطعات معیوب و محموله زمانی رد می‌شود که $X\geq 1$ باشد.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4=0.3439$$