3

احتمال شرطي و استقلال

1. 2 تاس منظم پرتاب شده است. احتمال شرطي اينكه حداقل يكي از تاسها عدد 6 ظاهر شود به شرط آنكه نتيجه دو تاس متفاوت باشد چقدر است؟
اگر A و B را به ترتيب براي پيشامدهاي حداقل يكي از تاسها عدد 6 ظاهر شود و نتيجه دو تاس متفاوت باشد در نظر بگيريم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{10/36}{30/36}=\frac{1}{3}$$

2. اگر دو تاس منظم پرتاب شوند. احتمال شرطي اينكه اولين تاس عدد 6 ظاهر شود، به شرط اينكه مجموع دو تاس i باشد را به دست آوريد. اين احتمال را براي i بين 2 و 12 محاسبه كنيد.
اگر A را برابر با پيشامد اينكه نتيجه پرتاب تاس اول عدد 6 است و از B_i براي اشاره به پيشامد اينكه مجموع دو تاس برابر با i است استفاده كنيم. در اين سؤال به دنبال محاسبه $P(A\mid B_i)\ (i=1,2,\cdots,12)$ هستيم. با توجه به اينكه اگر اولين تاس عدد 6 باشد مجموع دو تاس نمي‌تواند كمتر از 6 باشد بنابراين $P(A\mid B_i)=0\ (i=1,2,\cdots,6)$ است. و بقيه مقادير با استفاده از فرمول مربوطه به صورت زير حاصل مي‌شود.

$$P(A\mid B_7)=\frac{P(A\cap B_7)}{P(B_7)}=\frac{1/36}{1/6}=\frac{1}{6},\ P(A\mid B_8)=\frac{P(A\cap B_8)}{P(B_8)}=\frac{1/36}{5/6}=\frac{1}{5}$$

و به همين ترتيب بقيه مقادير حاصل مي‌شود.

$$P(A\mid B_9)=\frac{1}{4},P(A\mid B_{10})=\frac{1}{3},\ \ P(A\mid B_{11})=\frac{1}{2},\ \ P(A\mid B_{12})=1$$

3. *

4. احتمال اينكه حداقل در يكي از دو تاس منظم پرتاب شده عدد 6 ظاهر شود به شرط اينكه مجموع دو تاس i باشد را به دست آوريد. (i= 2، 3 ، ... ،12)
A: پيشامد اينكه نتيجه پرتاب تاس اول عدد 6 باشد، B: پيشامد اينكه نتيجه پرتاب تاس دوم عدد 6 باشد و C_i: پيشامد اينكه مجموع دو تاس i باشد. در اين مسأله به دنبال محاسبه $P(A\cup B\mid C_i)$ براي (i= 2، 3 ، ... ،12) هستيم. با توجه به اينكه

$$P(A\cup B\mid C_i)=P(A\mid C_i)+P(B\mid C_i)-P(A\cap B\mid C_i)$$

است و با در نظر گرفتن جواب سؤال 2 و با توجه به اينكه $P(A\cap B\mid C_i)=0$ براي (i= 2، 3 ، ... ،11) و $P(A\cap B\mid C_{12})=1$ در نتيجه $P(A\cup B\mid C_i)=0$ براي (i= 2، 3 ،... ،6) و

$$P(A\cup B\mid C_7)=\frac{2}{6},\ P(A\cup B\mid C_8)=\frac{2}{5},\ \ P(A\cup B\mid C_9)=\frac{2}{4},\ P(A\cup B\mid C_{10})=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cup B\mid C_{11})=P(A\cup B\mid C_{12})=1$$

5. كيسه‌اي شامل 6 توپ سفيد و 9 توپ سياه است. اگر 4 توپ را به تصادف و بدون جايگذاري انتخاب كنيم. احتمال اينكه 2 توپ انتخاب شده اول سفيد و دو توپ انتخاب شده آخر سياه باشند را به دست آوريد.
اگر E_1، E_2، E_3 و E_4 به ترتيب پيشامد اينكه توپ اول سفيد، توپ دوم سفيد، توپ سوم سياه و توپ چهارم سياه باشد آنگاه

$$P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4)=P(E_1)P(E_2\mid E_1)P(E_3\mid E_1\cap E_2)P(E_4\mid E_1\cap E_2\cap E_3)=$$
$$=\frac{6}{15}\times\frac{5}{14}\times\frac{9}{13}\times\frac{8}{12}=\frac{6}{91}$$

6. ظرفي را در نظر بگيريد كه در آن 12 توپ قرار دارد و 8 تاي آن سفيد است. يک نمونه 4 تايي را از ظرف با جايگذاري (بدون جايگذاري) انتخاب مي‌كنيم احتمال شرطي اينكه اولين و سومين توپ انتخاب شده سفيد باشند به شرط اينكه نمونه انتخاب شده شامل 3 توپ سفيد باشد را به دست آوريد. (در هر دو حالت)
A: پيشامد اينكه نمونه شامل 3 توپ سفيد باشد. B: پيشامد اينكه اولين و سومين توپ سفيد باشد.

حالت با جايگذاري: براي اينكه 3 توپ از ميان 4 توپ سفيد باشد $\binom{4}{3}$ حالت وجود دارد و در نتيجه

$$P(A)=\binom{4}{3}\left(\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{4}{12}\right)$$

مي‌دانيم 3 توپ سفيد داريم كه توپ اول و سوم سفيد هستند بنابراين براي انتخاب محل ديگر براي توپ سفيد $\binom{2}{1}$حالت وجود دارد و در نتيجه $P(A\cap B)=\binom{2}{1}\left(\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{4}{12}\right)$ و بنابراين $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$ است.

حالت بدون جايگذاري: $P(A)=\binom{4}{3}\left(\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\right)$

$$P(A\cap B)=\binom{2}{1}\left(\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\right)$$

$$P(B\mid A)=\frac{1}{2}$$

7. پادشاه از خانواده‌اي است كه دو فرزند دارد، احتمال اينكه فرزند ديگر خانواده خواهر او باشد چقدر است؟

A: پيشامد اينكه يكي از فرزندان پسر باشد. B: پيشامد اينكه يكي از فرزندان دختر باشد.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{2}{3}$$

8. زوجي داراي دو فرزند هستند. احتمال اينكه هر دو فرزند دختر باشند به شرط اينكه فرزند بزرگتر دختر باشد را به دست آوريد.

A: پيشامد اينكه هر دو فرزند دختر باشند. B: پيشامد اينكه فرزند بزرگـتر دختر باشد.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/4}{2/4}=\frac{1}{2}$$

9. 3 ظرف را در نظر بگيريد. ظرف A شامل 2 توپ سفيد و 4 توپ قرمز است، ظرف B شامل 8 توپ سفيد و 4 توپ قرمز است و در ظرف C يک توپ سفيد و 3 توپ قرمز قرار دارد. اگر يک توپ را به تصادف از هر ظرف انتخاب كنيم، احتمال اينكه توپ انتخاب شده از ظرف A سفيد باشد به شرط اينكه 2 توپ سفيد انتخاب شده باشد را به دست آوريد.

فرض كنيد A، B و C به ترتيب پيشامد انتخاب توپ سفيد از ظروف A، B و C باشد و W پيشامد اينكه دو توپ سفيد انتخاب شده است.

$$P(A\mid W)=\frac{P(WA)}{P(W)}=\frac{7/36}{11/36}=\frac{7}{11}$$

$$P(WA)=P(ABC^c)+P(AB^cC)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$$

$$P(W)=P(AB^cC)+P(ABC^c)+P(A^cBC)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$$

10. *

11. شانس بارداري غير طبيعي براي زنان بارداري كه سيگاري هستند دو برابر زنان غير سيگاري است. اگر 32 درصد از زنهاي سن بارداري سيگاري باشند چند درصد از زنهايي كه بارداري غير طبيعي دارند سيگاري هستند؟

A و B را به ترتيب براي نشان دادن پيشامد بارداري غير طبيعي و سيگاري بودن زنان سن بارداري در نظر مي‌گيريم.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=\frac{16/75}{33/75}=\frac{16}{33}$$

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid B^c)P(B^c)=\frac{2}{3}\times\frac{32}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{68}{100}=\frac{33}{75}$$

12. 98 درصد نوزادان هنگام تولد زنده هستند، 15 درصد از زايمانها با عمل سزارين انجام مي‌گيرد و شانس زنده ماندن با عمل سزارين 96 درصد است. اگر يک زن باردار به تصادف انتخاب شود و براي زايمان تحت عمل سزارين قرار نگيرد با چه احتمالي بچه او زنده خواهد بود.

اگر E را پيشامد زنده ماندن نوزاد و F را پيشامد اينكه شخص تحت عمل سزارين قرار بگيرد در نظر بگيريم.

$P(E)=\frac{98}{100},\quad P(E|F)=\frac{96}{100},\quad P(F)=\frac{15}{100}$ در اين مسأله به دنبال محاسبه احتمال $P(E|F^c)$ هستيم. مي‌دانيم

$$P(E)=P(E\cap F)+P(E\cap F^c)$$

$$\frac{98}{100}=P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c)$$

$$\frac{98}{100}=\frac{96}{100}\times\frac{15}{100}+P(E|F^c)\times\frac{85}{100}$$

$$P(E|F^c)=\frac{8360}{8500}=0.9835$$

13. در يک محله، 36 درصد از خانواده‌ها يک خودرو دارند و 22 درصد از آنها نيز يک دوچرخه هم دارند، همچنين 30 درصد از خانواده‌ها يک دوچرخه دارند. مطلوب است،

الف) احتمال اينكه خانواده‌اي كه به تصادف انتخاب مي‌شود هم خودرو و هم دوچرخه داشته باشد.

ب) احتمال شرطي اينكه خانواده انتخاب شده خودرو داشته باشد به شرط اينكه اين خانواده همچنين صاحب يک دوچرخه باشد.

A و B به ترتيب پيشامد داشتن يک خودرو و يک دوچرخه است.

$$P(A)=0.36,P(B)=0.3,P(B|A)=0.22$$

(الف) $P(AB)=P(B|A)P(A)=0.22\times0.36=0.0792$

(ب) $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.0792}{0.3}=0.264$

14. در شهري 46 درصد از رأي دهندگان خود را در گروه مستقل مي‌پندارند در حالي كه 30 درصد ليبرال و 24 درصد محافظه‌كار هستند. در يک انتخابات محلي 35 درصد از گروه مستقل، 62 درصد از ليبرالها و 58 درصد از محافظه‌كاران رأي داده‌اند. اگر يک رأي دهنده را به تصادف انتخاب كنيم و بدانيم كه در انتخابات محلي شركت كرده-است. مطلوب است احتمال اينكه او

الف) از گروه مستقل باشد.

ب) از گروه ليبرال باشد.

ج) از گروه محافظه‌كار باشد.

د) چه نسبتي از رأي دهندگان در انتخابات محلي شركت داشته‌اند.

E، L و M را به ترتيب پيشامد اينكه رأي دهنده از گروه مستقل، ليبرال و محافظه‌كار و R را پيشامد اينكه رأي دهنده در انتخابات محلي شركت كند در نظر مي‌گيريم.

$$P(E)=\frac{46}{100},P(L)=\frac{30}{100},P(M)=\frac{24}{100},P(R|E)=\frac{35}{100},P(R|L)=\frac{62}{100},P(R|M)=\frac{58}{100}$$

(الف)

$$P(E|R)=\frac{P(R|E)P(E)}{P(R)}=\frac{0.1610}{0.4862}=.331$$

$$P(R)=P(R|E)P(E)+P(R|L)P(L)+P(R|M)P(M)=0.4862$$

(ب) $P(L|R)=\frac{P(R|L)P(L)}{P(R)}=0.3826$

(ج) $P(M|R)=\frac{P(R|M)P(M)}{P(R)}=0.2863$

(د) با توجه به اينكه $P(R)=0.4862$ است بنابراين 48.62 درصد از رأي دهندگان در انتخابات محلي شركت كرده‌اند.

15. در يک كلاس ترک سيگار، 48 درصد از زنها و 37 درصد از مردهاي عضو كلاس موفق شده‌اند كه حداقل يک سال بعد از كلاس سيگار نكشند. اين افراد در پايان يک سال در يک جشن شركت مي‌كنند. اگر 62 درصد از اعضاي كلاس مرد باشند.

الف) مطلوب است درصد زنهايي كه در جشن شركت كرده‌اند.

ب) چند درصد از افراد شركت كننده در كلاس در جشن شركت كرده‌اند؟

A، F و M به ترتيب پيشامد ترک سيگار، زن و مرد بودن است.
(الف)

$$P(F \mid A)=\frac{P(A\mid F)P(F)}{P(A)}=\frac{0.1824}{0.4118}=0.4429$$

$$P(A)=P(A\mid F)P(F)+P(A\mid M)P(M)=0.48\times 0.38+0.37\times 0.62=0.4118$$

بنابراين 44.29 درصد از زنان در جشن شرکت کرده‌اند.
(ب) با توجه به اينکه $P(A)=0.4118$ بنابراين 41.18 درصد از افراد کلاس در جشن شرکت کرده‌اند.

16. در يک دانشکده، 52 درصد از دانشجويان زن هستند. رشته اصلي 5 درصد از دانشجويان اين دانشکده، کامپيوتر است. 2 درصد از دانشجويان زن رشته اصلي آنها کامپيوتر است. اگر يک دانشجو را به تصادف انتخاب کنيم احتمال شرطي پيشامدهاي زير را به دست آوريد:

الف) اين دانشجو زن باشد به شرط اينکه در رشته کامپيوتر تحصيل کند.

ب) اين دانشجو در رشته کامپيوتر تحصيل کند به شرط اينکه دانشجو زن باشد.

E: پيشامد اينکه رشته دانشجو کامپيوتر و F: پيشامد اينکه دانشجو زن باشد.

(الف) $$P(F\mid E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{2}{5}=0.4$$

(ب) $$P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{2}{52}=0.03846$$

17. در مورد حقوق ساليانه 500 زوج متأهل از آنها سؤال کرده‌ايم. نتيجه اطلاعات به دست آمده در جدول زير خلاصه شده است. يعني مثلاً در 36 زوج، زن بيشتر از 25000 دلار و شوهرش کمتر از آن درآمد دارد. مطلوب است:

زن	شوهر: کمتر از 25000 دلار	شوهر: بيشتر از 25000 دلار
کمتر از 25000 دلار	212	198
بيشتر از 25000 دلار	36	54

الف) احتمال اينکه يک شوهر کمتر از 25000 دلار درآمد داشته باشد.

ب) احتمال شرطي اينکه زن بيش از 25000 دلار درآمد داشته باشد به شرط اينکه شوهر او نيز بيش از اين مبلغ درآمد داشته باشد.

ج) احتمال شرطي اينکه زن بيش از 25000 دلار درآمد داشته باشد به شرط اينکه شوهر اوکمتر از اين مبلغ درآمد داشته باشد.

اگر از M و F به ترتيب براي نشان دادن پيشامد اينکه درآمد مرد و زن کمتر از 25000 دلار است استفاده کنيم.

(الف) $$P(M)=P(M\cap F)+P(M\cap F^c)=\frac{212}{500}+\frac{36}{500}=\frac{62}{125}=0.496$$

(ب) $$P(F^c\mid M^c)=\frac{P(F^c\cap M^c)}{P(M^c)}=\frac{54/500}{252/500}=\frac{3}{14}$$

(ج) $$P(F^c\mid M)=\frac{P(F^c\cap M)}{P(M)}=\frac{36/500}{248/500}=\frac{9}{62}$$

18. يک فارغ التحصيل جديد براي شرکت در سه امتحان در تابستان برنامه‌ريزي نموده است. او اولين امتحان را در تيرماه ميدهد اگر قبول شود آنگاه دومين امتحان را در مردادماه و در صورت قبولي آخرين امتحان را در شهريورماه مي‌دهد و اگر در يک امتحان رد شود ديگر اجازه شرکت در امتحان بعدي را ندارد. احتمال قبولي در امتحان اول 0.9 و احتمال قبولي در امتحان دوم به شرط قبولي در امتحان اول 0.8 و احتمال قبولي در امتحان سوم به شرط قبولي در دو امتحان قبلي 0.7 است.

الف) احتمال اينکه او در هر سه امتحان قبول شود چقدر است؟

ب) به شرط اينکه او هر سه امتحان را قبول نشود با چه احتمالي در امتحان دوم رد شده است؟

اگر A، B و C به ترتيب پيشامد اينكه در امتحان اول، دوم و سوم قبول شود باشد آنگاه مي‌دانيم كه $P(A)=0.9, P(B\mid A)=0.8, P(C\mid A\bigcap B)=0.7$ است.

(الف) $P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid A\bigcap B)=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504$

(ب) براي حل اين قسمت ابتدا بايد احتمال اينكه او در هر سه امتحان قبول نشود (E) را به دست مي‌آوريم براي اين امر يا بايد در امتحان اول قبول نشود يا در امتحان اول قبول و در امتحان دوم رد شود يا در دو امتحان اول قبول و در امتحان سوم رد شود بنابراين

$$P(E)=P(A^c\cup AB^c\cup ABC^c)=P(A^c)+P(B^cA)+P(ABC^c)=0.1+$$
$$+P(B^c\mid A)P(A)+P(C^c\mid AB)P(A)P(B\mid A)=0.496$$

براي اينكه در امتحان دوم رد شده باشد بايد در امتحان اول قبول شود و بنابراين

$$P(AB^c\mid E)=\frac{P(AB^c)}{P(E)}=\frac{P(A)P(B^c\mid A)}{P(E)}=\frac{0.18}{.496}=0.3629$$

19. *

20. از ظرفي كه در ابتدا 5 توپ سفيد و 7 توپ سياه دارد هر مرتبه توپي را به تصادف انتخاب كرده، رنگ آن را يادداشت نموده و همراه دو توپ هم‌رنگ ديگر به ظرف بر مي‌گردانيم احتمال پيشامدهاي زير را محاسبه كنيد.

الف) دو توپ انتخاب شده اول سياه و دو توپ بعدي سفيد باشند.

ب) از چهار توپ انتخاب شده اول 2 توپ سياه انتخاب شده باشد.

(الف) $\frac{7}{12}\times\frac{9}{14}\times\frac{5}{16}\times\frac{7}{18}=\frac{35}{768}$

(ب) در اين قسمت باز هم دو توپ سفيد و دو توپ سياه انتخاب مي‌شود ولي به محل آنها اشاره نشده است كـه دو يـی‌ها

توانـــــد ی‌رنـد می‌قـرار بـگ بـــرابر بــا د محل‌نکـه تعـدای‌بـا توجـه بـه ا اه‌تــوپ س $\binom{4}{2}$ اسـت بنابراين

$$\binom{4}{2}\frac{35}{768}=\frac{210}{768}$$

21. ظرف I شامل 2 توپ سفيد و 4 توپ قرمز است و ظرف II شامل 1 توپ سفيد و يک توپ قرمز است. يک توپ را به تصادف از ظرف I انتخاب نموده و در ظرف II قرار مي‌دهيم و سپس يک توپ از ظرف II انتخاب مي‌كنيم. احتمال پيشامدهاي زير را به دست آوريد:

الف) توپ انتخاب شده از ظرف II سفيد باشد.

ب) توپ منتقل شده سفيد باشد به شرط اينكه توپ انتخاب شده از ظرف II سفيد باشد.

اگر از W_1، W_2 و R_1 به ترتيب براي دلالت بر پيشامدهاي توپ انتخاب شده از ظرف اول سفيد، از ظرف دوم سفيد و از ظرف اول قرمز استفاده كنيم.

(الف) $P(W_2)=P(W_2\mid W_1)P(W_1)+P(W_2\mid R_1)P(R_1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$

(ب) $P(W_1\mid W_2)=\frac{P(W_2\mid W_1)P(W_1)}{P(W_2)}=\frac{2/9}{4/9}=\frac{1}{2}$

22. هر يک از دو توپ را سياه يا طلايي رنگ زده و در يک ظرف قرار مي‌دهيم فرض كنيد احتمال اينكه توپ سياه رنگ شود $\frac{1}{2}$ است و توپها مستقل از يكديگر رنگ شوند.

الف) اگر بدانيم كه رنگ طلايي استفاده شده (حداقل يک توپ طلايي رنگ زده شده است) احتمال شرطي اينكه هر دو توپ طلايي رنگ شده باشند را به دست آوريد.

ب) فرض كنيد كه ظرف كج شده و يک توپ از آن خارج شود و رنگ آن طلايي باشد در اين حالت احتمال اينكه هر دو توپ طلايي باشند چقدر است؟ شرح دهيد.

E: پيشامد اينكه هر دو توپ طلايي رنگ شده باشند و F: پيشامد اينكه حداقل يک توپ طلايي رنگ شده باشد. در نتيجه

(الف) $P(E\mid F)=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$

اگر G و H را به ترتیب پیشامد اینکه رنگ توپ اول و دوم طلایی باشد در نظر بگیریم و با توجه به اینکه توپها مستقل از یکدیگر رنگ می‌شوند و احتمال اینکه تـوپ طلایی رنگ شود برابر $\frac{1}{2}$ است در نتیجه $P(H \mid G)=\frac{P(G\bigcap H)}{P(G)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$ است.

23. روش زیر را برای برآورد تعداد افراد بالای 50 سال در یک شهر با جمعیت 100000 نفر به کار برده‌اند. « همان گونه که در خیابان راه میروید درصد افرادی که از کنار شما عبور می‌کنند و بالای 50 سال هستند را یادداشت کنید و این عمل را چند روز تکرار کنید. آنگاه نسبت به دست آمده را در 100000 ضرب کنید، تا برآورد حاصل گردد» نظر خود را درباره این روش ارایه دهید.

راهنمایی: فرض کنید p نسبت افرادی باشد که بالای 50 سال هستند و در این شهر ساکنند. به علاوه فرض کنید α_1 نسبت زمانی باشد که یک فرد زیر 50 سال از خیابان عبور می‌کند و α_2 همین نسبت برای افراد بالای 50 سال باشد. چه کمیتی را این روش برآورد می‌کند؟ چه زمانی این کمیت تقریباً برابر با p است؟

فرض کنید α_1 و α_2 به ترتیب نسبت زمانی است که یک فرد زیر و بالای 50 سال از خیابان عبور می‌کند. حال با توجه به اینکه کل افرادی که در خیابان از کنار من عبور می‌کنند برابر با $100000(\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p)$ و تعداد افراد بالای 50 سال برابر با $100000\alpha_2 p$ می‌باشد بنابراین نسبت به دست آمده برابر با $\frac{\alpha_2 p}{\alpha_2 p+\alpha_1(1-p)}$ می‌باشد که اگر بخواهیم این نسبت برابر با p شود باید $\alpha_1(1-p)+\alpha_2 p=\alpha_2$ گردد که در نتیجه باید $\alpha_1=\alpha_2$ باشد.

24. تصور کنید که 5 درصد مردان و 0.25 درصد از زنان بیماری کوررنگی دارند. اگر یک فرد کوررنگ را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردها و زنها برابر باشند. اگر تعداد مردها دو برابر تعداد زنها باشد پاسخ چیست؟

اگر A، F و M به ترتیب پیشامد کور رنگ بودن، زن بودن و مرد بودن باشد.

الف) $P(F)=P(M)=\frac{1}{2}$

$$P(A \mid M)=0.05, P(A \mid F)=0.0025$$
$$P(A)=P(A\bigcap F)+P(A\bigcap M)=P(A \mid F)P(F)+P(A \mid M)P(M)=0.02625$$
$$P(M \mid A)=\frac{P(A \mid M)P(M)}{P(A)}=0.95238$$

ب) $P(M)=\frac{2}{3}, P(F)=\frac{1}{3}$

$$P(A)=0.034$$
$$P(M \mid A)=0.9756$$

25. همه کارگران یک شرکت با خودرو به سرکار آمده و خودرو را در پارکینگ شرکت پارک می‌کنند. شرکت مایل است متوسط تعداد کارگرانی که در یک خودرو به محل کار می‌آیند را برآورد نماید. کدام یک از روشهای زیر می‌تواند برای تحقق این هدف مفید باشد؟ پاسخ خود را شرح دهید.

الف) به طور تصادفی n کارگر را انتخاب نموده و تعداد افرادی که با خودرو آنها آمده‌اند را تعیین و سپس متوسط این اعداد را محاسبه نماید.

ب) به طور تصادفی n خودرو را در پارکینگ انتخاب نموده و تعداد افرادی که با این خودروها به محل کار آمده‌اند را شمارش و متوسط آنها را محاسبه نماید.

روش (ب) مفیدتر است زیرا در روش (الف) ممکن است از n کارگر تعدادی از افراد با یک اتومبیل آمده باشند که به این ترتیب برآورد مناسبی به دست نمی‌آید.

26. *

27. 15 توپ تنیس در یک جعبه وجود دارد که 9 تای آنها قبلاً استفاده شده است. 3 توپ را به تصادف انتخاب نموده و با آنها بازی می‌کنیم و سپس به جعبه بر می‌گردانیم. مدتی بعد 3 توپ دیگر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هیچ یک از این سه توپ قبلاً استفاده نشده باشد را به دست آورید.

فرض کنید A، B، C و D به ترتیب پیشامد انتخاب 1، 2، 3 و صفر توپ جدید در مرتبه‌ی اول باشند و E پیشامد انتخاب سه توپ جدید در مرحله‌ی دوم باشد.

$$P(E)=P(E\mid A)P(A)+P(E\mid B)P(B)+P(E\mid C)P(C)+P(E\mid D)P(D)=$$

$$=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}\times\frac{\binom{6}{1}\binom{9}{2}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{15}{3}}\times\frac{\binom{6}{2}\binom{9}{1}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{3}{3}}{\binom{15}{3}}\times\frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}\times\frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}}=0.02125$$

28. دو جعبه را در نظر بگيريد كه در يكي از آنها يک مهره سياه و يک مهره سفيد و در ديگري 2 مهره سياه و يک مهره سفيد قرار دارد. يک جعبه را به تصادف انتخاب مي‌كنيم و يک مهره را به تصادف از آن بيرون مي‌آوريم. احتمال اينكه اين مهره سياه باشد را به دست آوريد. اگر مهره انتخاب شده سفيد باشد احتمال اينكه جعبه اول انتخاب شده باشد را به دست آوريد.

A_i: پيشامد اينكه جعبه i ام ($i=1،2$) انتخاب شود و B و W را به ترتيب پيشامد اينكه مهره سياه و سفيد انتخاب شود در نظر مي‌گيريم.

$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$$

$$P(W)=1-P(B)=\frac{5}{12}$$

$$P(A_1\mid W)=\frac{P(W\mid A_1)P(A_1)}{P(W)}=\frac{3}{5}$$

29. لغت « سختي يا شدت » را آمريكاي‌ها به صورت rigour و انگليسي‌ها به صورت rigor مينويسند. مردي كه در يک هتل اقامت دارد، اين لغت را مي‌نويسد. يكي از حروف آن را به تصادف انتخاب كرده و مشاهده مي‌كنيم كه حرف صدادار است. اگر 40 درصد افراد ساكن در اين هتل انگليسي و 60 درصد آمريكايي باشند، احتمال اينكه نويسنده لغت انگليسي باشد را به دست آوريد.

اگر از A، E و H به ترتيب براي نشان دادن آمريكاي بودن، انگليسي بودن و حرف صدادار بودن استفاده كنيم آن‌گاه

$$P(E\mid H)=\frac{P(H\mid E)P(E)}{P(H\mid E)P(E)+P(H\mid A)P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\times 0.4}{\frac{2}{5}\times 0.4+\frac{1}{2}\times 0.6}=\frac{8}{23}$$

30. در مثال 3-6 فرض كنيد شواهد جديد بستگي به تفسير آن دارد و فقط 90 درصد محتمل است كه متهم اين خصوصيت را داشته باشد. در اين حالت احتمال اينكه متهم گناهكار باشد را به دست آوريد. (همانند قبل فرض كنيد كه او اين ويژگي را دارد.)

G و F را به ترتيب پيشامد اينكه متهم گناهكار است و داراي ويژگي گناهكاران است در نظر مي‌گيريم.

$$P(C\mid G)=0.9$$

$$P(G\mid C)=\frac{P(C\mid G)P(G)}{P(C\mid G)P(G)+P(C\mid G^c)P(G^c)}=\frac{0.54}{0.62}=\frac{27}{31}$$

31. در يک كلاس احتمال با 30 دانشجو، وضعيت درس بدين صورت است كه 15 نفر خوب، 10 نفر متوسط و 5 نفر ضعيف هستند. در يک كلاس احتمال ديگر كه آن هم 30 دانشجو دارد، 5 نفر خوب، 10 نفر متوسط و 15 نفر ضعيف هستند. شما (به عنوان يک كارشناس) از اعداد فوق اطلاع داريد ولي نمي‌دانيد كه كدام كلاس چنين وضعيتهايي را دارند. اگر يک دانشجو را به تصادف از هر كلاس انتخاب نموده و مشاهده كنيد كه دانشجوي انتخابي از كلاس A متوسط و دانشجوي انتخابي از كلاس B ضعيف است. احتمال اينكه كلاس A كلاس برتر باشد چقدر است؟

فرض كنيد A و B به ترتيب پيشامد كلاس برتر بودن دو كلاس A و B باشد و C پيشامد اينكه دانشجوي انتخابي از كلاس A متوسط است و D پيشامد اينكه دانشجوي انتخابي از كلاس B ضعيف است.

حال با توجه به اينكه شانس دو كلاس A و B براي برتر بودن در مرحله‌ي اول (بدون هيچ اطلاعي از دانشجويان كلاس) برابر $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ است، نىبنـــــابرا

$$P(A\mid CD)=\frac{P(CD\mid A)P(A)}{P(CD)}=\frac{P(C\mid A)P(D\mid A)P(A)}{P(C\mid A)P(D\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(D\mid B)P(B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{4}{36}}=\frac{3}{4}$$

32. فروشگاههاي A، B و C به ترتيب 50، 75 و 100 نفر كارمند دارند از اين كارمندان به ترتيب 50%، 60% و 70% زن هستند. اگر امكان استعفا بين كارمندان يكسان باشد و يک كارمند زن استعفا دهد، با چه احتمالي وي كارمند فروشگاه C است؟

سه فروشگاه در مجموع 225 كارمند دارند. اگر F را پيشامد اينكه كارمند زن باشد و A، B و C را به ترتيب پيشامد اينكه كارمند در فروشگاه A، B و C مشغول به كار است در نظر بگيريم آنگاه با توجه به مفروضيات مسأله نتيجه مي‌گيريم كه

$$P(C|F)=\frac{P(F|C)P(C)}{P(F)}=\frac{0.308}{P(F|A)P(A)+P(F|B)P(B)+P(F|C)P(C)}=\frac{0.308}{0.618}=\frac{1}{2}$$

33. الف) فردي در جيب خود يک سکه سالم و يک سکه كه دو طرفش شير است نگه ميدارد. او يكي از سكه‌ها را به تصادف انتخاب و آن را پرتاب مي‌كند، اگر شير ظاهر شود با چه احتمالي سكه سالم انخاب شده است؟

ب) فرض كنيد وي همان سكه را يک مرتبه ديگر پرتاب كند و دوباره شير ظاهر شود. حال احتمال اينكه اين سكه سالم باشد چقدر است؟

اگر از A براي نشان دادن سكه سالم و از H براي آمدن شير در پرتاب سكه استفاده كنيم.

(الف)
$$P(A|H)=\frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A)+P(H|A^c)P(A^c)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

(ب)

$$P(A|H\cap H)=\frac{P(H\cap H|A)P(A)}{P(H\cap H|A)P(A)+P(H\cap H|A^c)P(A^c)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

34. ظرف A، 5 توپ سفيد و 7 توپ سياه دارد، در ظرف B نيز 3 توپ سفيد و 12 توپ سياه قرار دارد. سكه‌اي را پرتاب كرده اگر شير ظاهر شود يک توپ از ظرف A و اگر خط ظاهر شود يک توپ از ظرف B انتخاب مي‌كنيم. فرض كنيد كه توپ انتخاب شده سفيد باشد، احتمال اينكه سكه خط آمده باشد را به دست آوريد.

اگر A و B را به ترتيب پيشامد اينكه از ظرف A و B توپ را انتخاب كنيم و W پيشامد اينكه توپ انتخاب شده سفيد باشد در نظر بگيريم.

با توجه به اينكه با ظاهر شدن خط ما يک توپ از ظرف B انتخاب مي‌كنيم بنابراين

$$P(B|W)=\frac{P(W|B)P(B)}{P(W)}=\frac{P(W|B)P(B)}{P(W|A)P(A)+P(W|B)P(B)}=\frac{\frac{3}{30}}{\frac{37}{120}}=\frac{12}{37}$$

35. در مثال 3-1 احتمال اينكه فردي در سال دوم يک تصادف داشته باشد به شرط اينكه در سال اول، هيچ تصادفي نداشته باشد را به دست آوريد.

اگر از A، A_1 و A_2 به ترتيب براي اشاره به مستعد تصادف بودن، در سال اول تصادف داشتن و در سال دوم تصادف داشتن استفاده كنيم.

$$P(A_2|A_1^c)=\frac{P(A_1^cA_2)}{P(A_1^c)}=\frac{46}{185}$$

$$\begin{aligned}P(A_1^cA_2)&=P(A_1^cA_2|A)P(A)+P(A_1^cA_2|A^c)P(A^c)\\&=P(A_1^c|A)P(A_2|A)P(A)+P(A_1^c|A^c)P(A_2|A^c)P(A^c)\\&=0.6\times0.4\times0.3+0.2\times0.8\times0.7=0.184\end{aligned}$$

36. يک نمونه 3تايي انتخاب شده به صورت زير را در نظر بگيريد: از ظرفي كه 5 توپ سفيد و 7 توپ قرمز دارد در هر مرحله يک توپ به تصادف انتخاب نموده رنگ آن را يادداشت نموده و آن را همراه با يک توپ از همان رنگ به ظرف باز مي‌گردانيم. احتمال اينكه نمونه ، شامل i توپ سفيد باشد را به دست آوريد.(3 ،2 ،1 ،i=0)

A_i ، B_j و S_i را به ترتيب پيشامد اينكه توپ i ام قرمز ، توپ j سفيد نمونــه i د باشـــد دریو تــوپ ســف شـاملنظر یمگیریم و

$$P(S_0)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=\frac{7}{12}\times\frac{8}{13}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{13}$$

براي اينكه يک توپ سفيد باشد سه حالت پيش مي‌آيد يا توپ اول يا دوم يا سوم سفيد است كه هر كدام داراي احتمال برابر هستند بنابراين

$$P(S_1)=\binom{3}{1}P(B_1)P(A_2 \mid B_1)P(A_3 \mid A_2B_1)=\frac{5}{12}\times\frac{7}{13}\times\frac{8}{14}=\frac{840}{2184}$$

$$P(S_2)=\binom{3}{2}\frac{5}{12}\times\frac{6}{13}\times\frac{7}{14}=\frac{630}{2184}$$

$$P(S_3)=\frac{5}{12}\times\frac{6}{13}\times\frac{7}{14}=\frac{210}{2184}$$

37. *

38. سه آشپز A، B و C هر كدام كيک خاصي را تهيه مي‌كنندكه به ترتيب با احتمالهاي 0.02، 0.03 و 0.05 كيک آنها هنگام پخت خراب مي‌شود. اگر در رستوراني كه آنها كار مي‌كنند؛ آشپز A، 50 درصد؛ آشپز B، 30 درصد؛ و آشپز C، 20 درصد از كيک‌ها را پخت كنند، چه نسبتي از كيک‌هاي خراب توسط آشپز A تهيه مي‌شود؟

اگر خراب شدن را با W نشان دهيم(زی‌قــانون ب)

$$P(A \mid W)=\frac{P(W \mid A)P(A)}{P(W)}=\frac{10}{29}$$

39. در جعبه‌اي 3 سكه وجود دارد كه يكي از آنها هر دو طرف شير، ديگري يک سكه سالم و سومي سكه‌اي اريب است كه هنگام پرتاب با احتمال 0.75 شير ظاهر مي‌شود. وقتي كه يكي از سكه‌ها را به تصادف انتخاب كرده و پرتاب مي‌كنيم، شير ظاهر مي‌شود. احتمال اينكه سكه دو طرف شير انتخاب شده باشد چقدر است؟

اگر از A، B، C و H به ترتيب براي نشان دادن سكه دو طرف شير، سكه سالم، سكه اريب و آمدن شير در پرتاب سكه استفاده كنيم.

$$P(A \mid H)=\frac{P(H \mid A)P(A)}{P(H)}=\frac{4}{9}$$

$$P(H)=P(H \mid A)P(A)+P(H \mid B)P(B)+P(H \mid C)P(C)=[1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}]\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$$

40. زندانباني به سه نفر زنداني اطلاع داده است كه يكي از آنها را به تصادف براي اعدام كردن انتخاب كرده‌اند و دو نفر ديگر آزاد مي‌شوند. زنداني A از زندانبان مي‌خواهد كه به طور خصوصي به او بگويد كه كدام يک از دو نفر B و C آزاد مي‌شوند و ادعا مي‌كند كه اين اطلاع هيچگونه مشكلي را براي زندانبان به وجود نمي‌آورد زيرا حداقل يكي از دو نفر B و C آزاد خواهند شد. زندانبان تقاضاي زنداني A را رد مي‌كند و براي خود چنين دليل مي‌آورد كه اگر A بداند كه كدام يک از دو نفر B و C آزاد مي‌شوند آنگاه شانس اعدام شدن خودش از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ افزايش مي‌يابد. زيرا وي يكي از دو نفر زنداني باقي مانده است. در مورد دليل زندانبان چه نظري داريد؟

فرض کنیم A، B و C به ترتیب نشان دهنده پیشامد اینکه فرد A، B و C اعدام می‌شوند، باشد و D پیشامد اینکه یکی از دو نفر B و C آزاد می‌شوند باشد. با توجه به اینکه حتماً یکی از دو نفر B و C آزاد می‌شوند بنابراین P(D)=1 است. حال اگر ما بدانیم که A اعدام شده است باز هم احتمال آزادی یکی از دو نفر B و C برابر با 1 است در نتیجه

$$P(A \mid D)=\frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)}=\frac{1}{3}$$

41. فرض كنيد 10 سكه داريم كه اگر سكه i ام را پرتاب كنيم با احتمال $\frac{i}{10}\,(i=1,\cdots,10)$ شير ظاهر مي‌شود. وقتي كه يكي از سكه‌ها را به تصادف انتخاب كرده و آن را پرتاب مي‌كنيم شير ظاهر مي‌شود. احتمال شرطي اينكه اين سكه، پنجمين سكه باشد را به دست آوريد.

اگر A_i و H را به ترتيب پرتاب سكه i ام و ظاهر شدن شير در نظر بگيريم.

$$P(A_i)=\frac{1}{10},P(H \mid A_i)=\frac{i}{10}$$

$$P(A_5 \mid H)=\frac{P(H \mid A_5)P(A_5)}{P(H)}=\frac{1/10\times 5/10}{55/100}=\frac{1}{11}$$

$$P(H)=\frac{1}{10}[\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}\times\cdots\times\frac{10}{10}]=\frac{55}{100}$$

42. احتمال اينكه يک راننده مرد بيمه شده در يک سال ادعاي خسارت نمايد برابر با P_m و همچنين اين احتمال براي يک راننده زن بيمه شده برابر با P_f است $(P_m \neq P_f)$. نسبت مردان راننده بيمه شده برابر است با $\alpha (0<\alpha<1)$.

اگر يک راننده بيمه شده به تصادف انتخاب شود و A_i را پيشامد اينكه وي در سال i ام ادعاي خسارت نمايد در نظر بگيريم. نشان دهيد كه

$$P(A_2 \mid A_1) > P(A_1)$$

شرح دهيد كه چرا نامساوي فوق صحيح است.

فرض كنيد A و B به ترتيب پيشامد اينكه يک راننده مرد و زن بيمه شده ادعاى خسارت نمايد.

$$P(A) = p_m, P(B) = p_f, (p_m \neq p_f)$$

اگر m و f به ترتيب نشان دهنده نسبت مردان بيمه شده به زنان و بالعكس باشند آنگاه داريم.

$$P(m) = \alpha, P(f) = 1-\alpha$$

$$P(A_1) = P(A_1 \mid m)P(m) + P(A_1 \mid f)P(f)$$

$$= p_m \times \alpha + p_f \times (1-\alpha) = \alpha(p_m + p_f) + p_f$$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_2 A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2 A_1 \mid f)P(f) + P(A_2 A_1 \mid m)P(m)}{P(A_1)}$$

43. ظرفي شامل 5 توپ سفيد و 10 توپ سياه است. يک تاس را پرتاب و به تعداد عدد ظاهر شده از ظرف توپ انتخاب مي‌كنيم. احتمال اينكه همه توپهاي انتخاب شده سفيد باشند چقدر است؟ احتمال شرطي اينكه نتيجه پرتاب تاس عدد 3 بوده، به شرط اينكه همه توپهاي انتخاب شده سفيد باشند را به دست آوريد.

A_i: ظاهر شدن عدد i در پرتاب تاس (i=1،...،6)

B: همه توپهاي انتخاب شده سفيد باشند.

$$P(A_i) = \frac{1}{6}, P(B \mid A_1) = \frac{5}{15}, P(B \mid A_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{2}{21}, P(B \mid A_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{2}{91}, P(B \mid A_4) = \frac{1}{273},$$

$$P(B \mid A_5) = \frac{1}{3003}, P(B \mid A_6) = 0$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B \mid A_i)P(A_i) = 0.0\overline{75}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(B \mid A_3)P(A_3)}{P(B)} = 0.04835$$

44. دو كمد يكسان هر كدام داراي دو كشو هستند. در هر يک از كشوهاي كمدA يک سكه نقره وجود دارد، اما در يكي از كشوهاي كمد B يک سكه طلا و در كشوي ديگر آن يک سكه نقره است. يكي از كمدها را به تصادف انتخاب نموده يكي از كشوهاي آن را باز مي‌كنيم و يک سكه نقره به دست مي‌آوريم. احتمال اينكه در كشوي ديگر اين كمد يک سكه نقره باشد چقدر است؟

براي اينكه در كشوي ديگر نيز نقره وجود داشته باشد بايد كمد A انتخاب شده باشد. اگر S را برابر با پيشامد اينكه انتخاب اول نقره باشد در نظر بگيريم آنگاه

$$P(S) = P(S \mid A)P(A) + P(S \mid B)P(B) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

45. فرض كنيد آزمايش مبتلا به بيماري سرطان براي كساني كه بيماري را دارند و كساني كه سالم هستند داراي دقت 0.95 باشد. اگر 0.4 درصد از افراد جامعه داراي بيماري سرطان باشند، مطلوب است احتمال اينكه فردي كه مورد آزمايش قرار گرفته داراي بيماري سرطان باشد به شرط اينكه نتيجه آزمايش مثبت باشد.

اگر از A، + و - براي اشاره به افراد داراي سرطان، نتيجه آزمايش + و نتيجه آزمايش - استفاده كنيم.

$$P(+ \mid A) = 0.95, P(- \mid A^c) = 0.95 \Rightarrow P(+ \mid A^c) = 0.05, P(A) = 0.004$$

$$P(A \mid +) = \frac{P(+ \mid A)P(A)}{P(+ \mid A)P(A) + P(+ \mid A^c)P(A^c)} = \frac{0.95 \times 0.004}{0.95 \times 0.004 + 0.996 \times 0.05} = \frac{19}{268}$$

46. تصور كنيد كه يک مؤسسه بيمه افراد جامعه را به سه گروه افراد با ريسک بالا افراد با ريسک متوسط و افراد با ريسک پايين تقسيم‌بندي نموده و اطلاعات آن نشان ميدهد كه احتمال تصادف كردن اين گروهها در طول يک سال به ترتيب 0.05، 0.15 و 0.30 است. اگر 20 درصد افراد جامعه ريسک بالا، 50 درصد ريسک متوسط و 30 درصد ريسک پايين باشند. چه نسبتي از افراد جامعه در يک سال تصادف دارند؟ اگر فرد F در يک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اينكه وي از گروه با ريسک متوسط باشد را به دست آوريد.

اگر افراد با ريسک بالا، متوسط و پايين را به ترتيب با A، B و C و پيشامد تصادف كردن را با D نشان دهيم آنگاه

$$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)=0.175$$

بنابراين 17.5 درصد از افراد جامعه در يک سال تصادف دارند.

$$P(B\mid D^c)=\frac{P(D^c\mid B)P(B)}{P(D^c)}=\frac{0.85\times 0.5}{0.825}=\frac{17}{33}$$

47. کارمندي از مدير خود تقاضاي يک توصيه‌نامه براي استخدام در يک شغل جديد مي‌نمايد. او برآورد مي‌کند که اگر توصيه‌نامه قوي باشد با شانس 80 درصد استخدام خواهد شد و اگر توصيه‌نامه خوب باشد با شانس 40 درصد و در صورت دريافت توصيه‌نامه ضعيف تنها 10 درصد شانس استخدام دارد. او همچنين احتمال دريافت توصيه‌نامه قوي، خوب و ضعيف را به ترتيب 0.7، 0.2 و 0.1 برآورد مي‌کند.

الف) چقدر اطمينان دارد که او در شغل جديد استخدام مي‌شود؟

ب) اگر با استخدام او موافقت شود با چه احتمالي توصيه‌نامه داده‌شده براي او قوي، خوب و ضعيف بوده است؟

ج) اگر با استخدام او موافقت نشود با چه احتمالي توصيه‌نامه داده‌شده براي او قوي، خوب و ضعيف بوده است؟

اگر از A، B، C و D به ترتيب براي اشاره به پيشامدهاي استخدام شدن، توصيه‌نامه قوي، خوب و ضعيف استفاده کنيم.

$$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid C)P(C)+P(A\mid D)P(D)=$$
$$=0.8\times 0.7+0.4\times 0.2+0.1\times 0.1=0.65$$

(ب)

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=\frac{56}{65},P(C\mid A)=\frac{8}{65},P(D\mid A)=\frac{1}{65}$$

(ج)

$$P(B\mid A^c)=\frac{P(A^c\mid B)P(B)}{P(A^c)}=\frac{14}{35},P(C\mid A^c)=\frac{12}{35},P(D\mid A^c)=\frac{9}{35}$$

48. يک دانش‌آموز بي‌صبرانه منتظر دريافت نامه‌اي است که نتيجه پذيرفته شدن او در دانشگاه را نشان مي‌دهد. او برآورد مي‌کند که احتمالهاي شرطي دريافت نامه در روزهاي هفته به شرط پذيرش و عدم پذيرش به شرح زير باشد.

روز	P(پذيرش|نامه)	P(عدم‌پذيرش|نامه)
دوشنبه(M)	0.15	0.05
سه‌شنبه(T)	0.20	0.10
چهارشنبه(W)	0.25	0.10
پنجشنبه(U)	0.15	0.15
جمعه(F)	0.10	0.20

او همچنين شانس پذيرش (E) خود را 0.6 تخمين زده است.

الف) با چه احتمالي نامه را روز دوشنبه دريافت مي‌کند؟

ب) احتمال اينکه وي نامه را روز سه‌شنبه دريافت کند به شرط اينکه دوشنبه دريافت نکرده باشد چقدر است؟

ج) اگر تا چهارشنبه نامه را دريافت نکند، احتمال شرطي اينکه وي پذيرش شود را به دست آوريد.

د) اگر نامه را روز پنجشنبه دريافت نمايد با چه احتمالي پذيرش شده است؟

ه) احتمال شرطي پذيرش او در صورت دريافت نکردن نامه در آن هفته چقدر است؟

(الف)
$$P(M)=P(M\mid E)P(E)+P(M\mid E^c)P(E^c)=0.15\times 0.6+0.05\times 0.4=0.11$$

(ب)
$$P(T\mid M^c)=\frac{P(TM^c)}{P(M^c)}=\frac{P(T)}{P(M^c)}=\frac{0.16}{0.89}=\frac{16}{89}$$

$$P(T)=P(T\mid E)P(E)+P(T\mid E^c)P(E^c)=0.2\times 0.6+0.1\times 0.4=0.16$$

(ج) فرض کنيد G پيشامد اين است که نامه را تا چهارشنبه دريافت نکند.

$$P(G)=P(M^cT^cW^c)=P(W\cup T\cup M)^c=1-P(W\cup T\cup M)=1-0.46=0.54$$
$$P(W\cup T\cup M)=P(W)+P(T)+P(M)=0.19+0.16+0.11=0.46$$
$$P(E\mid W^cT^cM^c)=\frac{P(W^cT^cM^c\mid E)P(E)}{P(W^cT^cM^c)}=\frac{0.4\times 0.6}{0.54}=\frac{24}{54}=\frac{12}{27}$$
$$P(W^cT^cM^c\mid E)=1-P(W\cup T\cup M\mid E)=1-0.6=0.4$$
$$P(W\cup T\cup M\mid E)=P(W\mid E)+P(T\mid E)+P(M\mid E)=0.15+0.2+0.25=0.6$$

(د)
$$P(E\mid U)=\frac{P(U\mid E)P(E)}{P(U)}=\frac{0.15\times 0.6}{0.15}=\frac{0.09}{0.15}=\frac{3}{5}$$

(ه) فرض کنید H پیشامد این است که نامه را در این هفته دریافت نکند.

$$P(H)=P(M^cT^cW^cU^cF^c)=1-P(M\cup T\cup W\cup U\cup F)=$$
$$=1-P(M)-P(T)-P(W)-P(U)-P(F)=1-.11-.16-.19-.15-.14=.25$$

$$P(E\mid M^cT^cW^cU^cF^c)=\frac{P(M^cT^cW^cU^cF^c\mid E)P(E)}{P(H)}=\frac{0.15\times 0.6}{0.25}=\frac{9}{25}$$

$$P(M^cT^cW^cU^cF^c\mid E)=1-P(M\cup T\cup W\cup U\cup F\mid E)=1-.15-.2-.25-.15-.1=.15$$

49. یک سیستم موازي کار ميکند اگر حداقل یکي از اجزاء تشکیل دهنده آن سیستم کار کند. یک سیستم موازي تشکیل شده از n جزء را که احتمال کار کردن هر جزء مستقل از یکدیگر برابر با 0.5 باشد در نظر ميگیریم. احتمال شرطي اینکه جزء 1 کار کند به شرط اینکه سیستم کار کند را به دست آورید

فرض کنید A و A_i به ترتیب نشان دهندهي کار کردن سیستم و جزء i ام باشند. مایل به محاسبه $P(A_1\mid A)=\frac{P(A\mid A_1)P(A_1)}{P(A)}$ ميباشیم. سیستم در صورتي کار نميکند که هیچ کدام از اجزاء آن کار نکند بنابراین

$$P(A)=1-P(A^c)=1-[0.5]^n$$

$$P(A\mid A_1)=1,\quad P(A_1)=0.5\quad\Rightarrow\quad P(A_1\mid A)=\frac{0.5}{1-[0.5]^n}$$

50. اگر لازم باشد یک مدل ریاضي براي پیشامدهاي E و F به ترتیبي که در حالتهاي زیر شرح داده شدهاند، بسازید. آیا فرض مستقل بودن آنها را در نظر ميگیرید؟ دلیل خود را شرح دهید.

الف) E پیشامدي که یک زن پیشهور داراي چشمان آبي باشد و F پیشامدي که منشي او نیز چنین باشد.

ب) E پیشامدي است که یک معلم داراي خودرو باشد و F پیشامدي است که نام وي در دفتر تلفن باشد.

ج) E پیشامدي که قد یک مرد کمتر از 6 فوت است و F پیشامدي که وزن او بیش از 200 پوند باشد.

د) E پیشامدي است که فردا باران خواهد آمد و F پیشامدي است که پس فردا باراني باشد.

(الف) مستقل هستند زیرا این دو به هم هیچ ارتباطي ندارند.

(ب) مستقل نیستند زیرا وقتي معلمي اتومبیل داشته باشد احتمال تلفن دار بودن آن بیشتر است.

(ج) مستقل نیستند زیرا این دو به هم مربوط هستند.

(د) مستقل نیستند زیرا هواي امروز تا حدي ميتواند نشانگر هواي فردا باشد.

51. در یک کلاس 4 دانشجوي پسر سال اول، 6 دانشجوي دختر سال اول و 6 دانشجوي پسر سال دوم ثبتنام کردهاند. چند دانشجوي دختر سال دوم باید در این کلاس ثبتنام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف، پیشامدهاي جنس و سال تحصیلي مستقل باشند؟

M، F، A و B به ترتیب نشان دهنده پسر، دختر، دانشجوي سال اول و دوم بودن است. x نشان دهنده تعداد دانشجوي دختر سال دوم است.

$$P(M)=\frac{10}{16+x},\ P(A)=\frac{10}{16+x}$$

ميخواهیم $P(A\mid F)=P(A)$ باشد در نتیجه

$$\frac{6}{6+x}=P(A\mid F)=P(A)=\frac{10}{16+x}\Rightarrow 4x=36\Rightarrow x=9$$

52. فرض کنید که شما به طور پیوسته تمبر جمع ميکنید و کلاً m نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداري ميکنید با احتمال P_i از نوع i ام (i= 1، 2، ... ،m) است. حال اگر شما n امین تمبر را جمعآوري کرده باشید با چه احتمالي این تمبر جدید است؟

راهنمایي: پیشامد را روي نوع تمبر مشروط کنید.

اگر E_n را برابر با پیشامد اینکه تمبر n ام جدید است در نظر بگیریم و A_i را پیشامد اینکه n امین تمبر از نوع i ام است در نظر بگیریم.

$$P(E_n)=\sum_{i=1}^{m}P(E_n\cap A_i)=\sum_{i=1}^{m}(1-p_i)^{n-1}p_i$$

برای اینکه n امین تمبر جدید بوده و از نوع i ام باشد باید (n-1) تمبر اول از نوع i ام نباشد و n امین تمبر از نوع i ام باشد؛ بنابراین $P(E_n\cap A_i)=(1-p_i)^{n-1}p_i$

53. یک مدل ساده براي تغییرات نرخ سهام بازار بورس بدین ترتیب است که در هر روز، نرخ سهام یک واحد با احتمال P افزایش و با احتمال 1-P کاهش مييابد. همچنین تغییرات در روزهاي مختلف مستقلند.

الف) احتمال اینکه بعد از دو روز نرخ سهام همان قیمت اولیه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بعد از 3 روز نرخ سهام به اندازه 1 واحد افزایش یافته باشد چقدر است؟

ج) به شرط اینکه بعد از 3 روز نرخ سهام یک واحد افزایش یافته باشد با چه احتمالي در اولین روز یک واحد افزایش داشته است؟

اگر از A، B و C به ترتیب براي اشاره به افزایش، کاهش و ثابت ماندن نرخ سهام استفاده کنیم آنگاه:

(الف) براي ثابت ماندن در دو روز باید یک افزایش و یک کاهش قیمت را شاهد باشیم که این به دو صورت امکان پذیر است (ابتدا افزایش بعد کاهش و بالعکس)

$$P(C)=P((A\cap B)\cup(B\cap A))=P(A\cap B)+P(B\cap A)=2P(1\_P)$$

(ب) (از W براي اشاره به اینکه بعد از 3 روز نرخ سهام به اندازه 1 واحد افزایش یافته استفاده ميکنیم.) براي اینکه بعد از 3 روز نرخ سهام به اندازه 1 واحد افزایش یافته باشد ما باید شاهد دو افزایش و یک کاهش قیمت باشیم بنابراین

$$P(W)=\binom{3}{2}P(A\cap A\cap B)=3P^2(1-P)$$

(ج) (از A_1 براي اشاره به اینکه در روز اول افزایش قیمت داشتهایم استفاده ميکنیم.) با توجه به اینکه در روز اول افزایش قیمت داشتهایم بنابراین در دو روز باقيمانده باید یک افزایش و یک کاهش قیمت را شاهد باشیم. در نتیجه

$$P(A_1W)=\binom{2}{1}P(A_1AB)=2P^2(1-P)$$

$$P(A_1\,|\,W)=\frac{P(A_1W)}{P(W)}=\frac{2}{3}$$

54. فرض کنید ميخواهیم نتیجه حاصل از پرتاب یک سکه سالم را تعیین نماییم ولي سکهاي که در اختیار داریم سالم نیست. به طوري که احتمال شیر آمدن آن یک مقدار مجهول P که لزوماً $\frac{1}{2}$نیست ميباشد. براي تامین هدف خود آزمایشي با مراحل زیر را در نظر میگیریم:

1- سکه را پرتاب ميکنیم.

2- سکه را یکبار دیگر پرتاب ميکنیم.

3- اگر هر دو مرحله خط ظاهر شود به مرحله 1 باز ميگردیم.

4- نتیجه آزمایش را نتیجه آخرین پرتاب در نظر ميگیریم.

الف) نشان دهید که نتیجه شیر و خط آمدن برابر است.

ب) آیا میتوانیم آزمایش سادهتر « پرتاب سکه تا آمدن دو نتیجه متفاوت متوالي » را به کار ببریم و نتیجه آخرین پرتاب را در نظر بگیریم؟

میدانیم نتیجه پرتاب دو سکه به صورت TT، TH، HT یا HH میباشد. حال با در نظر گرفتن اینکه اگر هر دو مرحله خط ظاهر شود به مرحله 1 باز ميگردیم بنابراین برای اینکه نتیجه پرتاب شیر باشد باید یا در مرحلهی اول HH یا TH اتفاق بیفتد یا در مراحل بعد یکی از این دو پیشامد رخ دهد.

$$P(H)=\sum_{i=0}^{\infty}[P(HH)+P(HT)][P(TT)]^i=\sum_{i=0}^{\infty}[p^2+pq][q^2]^i=\frac{p^2+pq}{1-q^2}=\frac{1}{1+q}$$

برای اینکه نتیجه پرتاب خط باشد باید یا در مرحلهی اول HT اتفاق بیفتد یا در مراحل بعد این پیشامد رخ دهد.

$$P(T)=\sum_{i=0}^{\infty}[P(HT)][P(TT)]^i=\sum_{i=0}^{\infty}[pq][q^2]^i=\frac{pq}{1-q^2}=\frac{q}{1+q}$$

55. پرتابهاي مستقل سکهاي را که احتمال شیر آمدن آن برابر با P است انجام میدهیم. احتمال اینکه 4 نتیجه اول پرتابها به صورت زیر باشد را محاسبه کنید:

الف) H, H, H, H

ب) T, H, H, H

(الف) $P(HHHH)=P(H)P(H)P(H)P(H)=P^4$

(ب) اگر محل T مشخص باشد آنگاه احتمال مورد نظر برابر با $P(THHH)=P^3(1-P)$ است. ولي اگر فقط بخواهیم یک T وجود داشته باشد با توجه به اینکه $\binom{4}{1}$ حالت براي موقعیت این T وجود دارد در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\binom{4}{1}P^3(1-P)$ است.

56. رنگ چشم یک انسان به وسیله یک زوج ژن تعیین ميشود. به طوري کهاگر هر دو ژن چشم، آبي باشند رنگ چشم فرد آبي و اگر هر دو ژن چشم، قهوهاي باشند رنگ چشم فرد قهوهاي و اگر یک ژن آبي و یک ژن قهوهاي باشد رنگ چشم فرد قهوهاي خواهد بود (به این دلیل که رنگ قهوهاي غالب است.) یک نوزاد یک ژن را به طور مستقل از

مادر و ژن ديگر را از پدر مي‌گيرد، كه به طور هم شانس مي‌تواند ژن آبي يا ژن قهوه‌اي باشد. فرض كنيد علي و والدينش داراي چشم قهوه‌اي باشند ولي خواهر علي چشم آبي باشد.

الف) با چه احتمالي علي داراي ژن چشم آبي است؟

ب) احتمال اينكه اولين فرزند علي و همسرش چشم آبي داشته باشد چقدر است؟ فرض كنيد همسر علي چشم آبي باشد.

ج) اگر اولين فرزند آنها چشمان قهوه‌اي داشته باشد با چه احتمالي فرزند بعدي آنها نيز چشم قهوه‌اي خواهد داشت؟

با توجه به اينكه خواهر علي داراي چشمان آبي است بنابراين پدر و مادر علي داراي ژن آبي هستند. حال با توجه به اينكه چشمان علي قهوه‌اي است يكي از ژنهاي علي بايد قهوه‌اي باشد .

اگر A نشان دهنده اينكه علي داراي چشمان قهوه‌اي است و B پيشامد اينكه علي داراي ژن آبي باشد.

(الف) $$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$

(ب) چون همسر علي داراي چشمان آبي است بنابراين او فقط داراي ژن آبي مي‌باشد و طبق قسمت قبل مي‌دانيم كه علي با احتمال $\frac{2}{3}$ داراي ژن آبي است و اين ژن را با احتمال $\frac{1}{2}$ به فرزند خود منتقل مي‌كند بنابراين علي با احتمال $\frac{1}{3}$ ژن آبي را به فرزند خود منتقل مي‌كند. همسر علي نيز با احتمال 1 اين ژن را به فرزند خود منتقل مي‌كند و با توجه به استقلال نتيجه مي‌گيريم كه فرزند علي با احتمال $\frac{1}{3}$ اين ژن را دارا مي‌باشد.

(ج) پيشامد اينكه فرزند اول و دوم داراي چشمان قهوه‌اي است را به ترتيب با C و D نشان مي‌دهيم.

$$P(C)=P(C \mid B^c)P(B^c)+P(C \mid B)P(B)=1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(D\cap C)=P(DC \mid B)P(B)+P(DC \mid B^c)P(B^c)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

$$P(D \mid C)=\frac{1/2}{2/3}=\frac{3}{4}$$

57. ژنهاي مربوط به خصوصيت آلبينو بودن افراد با A و a نشان داده مي‌شوند. فقط افرادي كه ژن a را از پدر و مادر خود دريافت مي‌كنند آلبينو مي‌باشند. افرادي كه ژن آنها A و a است داراي ديد طبيعي هستند ولي چون مي‌توانند آن را به فرزند خود منتقل نمايند حامل ژن آلبينو هستند. فرض كنيد يک زوج طبيعي دو فرزند داشته باشند كه يكي از آنها آلبينو است. همچنين فرض كنيد فرزند غير آلبينو با فردي ازدواج كند كه حامل ژن آلبينو است. مطلوب است

الف) احتمال اينكه اولين فرزند آنها آلبينو باشد.

ب) احتمال اينكه دومين فرزند آنها آلبينو باشد به شرط اينكه فرزند اول آنها آلبينو نباشد.

با توجه به اينكه يكي از فرزندان آنها آلبينو است بنابراين هم پدر و هم مادر حامل ژن آلبينو هستند. اگر B پيشامد اين كه فرزند غير آلبينو داراي ژن آلبينو باشـــد آنگاه $P(B)=\frac{2}{3}$ است زيرا فرزند غير آلبينو است و تنها سه حالت (A,A)، (a,A) و (A,a) براي آن وجود دارد.

اگر از A_1 و A_2 براي اشاره به اينكه اولين و دومين فرزند آلبينو هستند استفاده كنيم.

(الف) $$P(A_1)=P(A_1 \mid B)P(B)+P(A_1 \mid B^c)P(B^c)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+0\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(ب)

$$P(A_2 \mid A_1^c)=P(A_2 \mid A_1^cB)P(B \mid A_1^c)+P(A_2 \mid A_1^cB^c)P(B^c \mid A_1^c)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+0=\frac{3}{20}$$

$$P(B \mid A_1^c)=\frac{P(A_1^c \mid B)P(B)}{P(A_1^c)}=\frac{1/2}{5/6}=\frac{3}{5}$$

58. دو فرد A و B براي تيراندازي مسابقه مي‌دهند. فرض كنيد هر شليک A با احتمال P_1 به هدف اصابت كند و هر شليک B با احتمال P_2 به هدف بخورد. به علاوه فرض كنيد آنها به طور همزمان به طرف يک هدف تيراندازي مي‌كنند. اگر تيري به هدف خورده باشد مطلوب است،

الف) احتمال اينكه هر دو تير به هدف خورده باشند.

ب) فقـــط تير A به هدف خورده باشد.

چه فرض استقلالي را در نظر ميگيريد.

A و B به ترتيب پيشامد اين است كه تير فرد A و B به هدف اصابت كند.

(الف) $P(AB)=P(A)P(B)=P_1P_2$

(ب) $P(AB^c)=P(A)P(B^c)=P_1(1-P_2)$

تيراندازي A وB برروي همديگر هيچ تأثيري ندارد.

.59 A و B در يک مبارزه شرکت ميکنند. قاعده مبارزه چنين است که آنها تفنگهاي خود را برداشته و همزمان به طرف يكديگر شليک ميکنند. اگر يکي از آنها يا هر دو مورد اصابت قرار گيرند آنگاه مبارزه تمام ميشود، اگر تير هر دو خطا رود آنها دوباره تکرار ميکنند. فرض کنيد نتايج شليکها مستقل بوده و A با احتمال P_A و B با احتمال P_B به هدف ميزند. مطلوب است،

الف) احتمال اينكه A به هدف نزند.

ب) احتمال اينكه هر دو به هدف بزنند.

ج) احتمال اينكه مبارزه بعد از n امين دوره تيراندازي تمام شود.

د) احتمال اينكه مبارزه بعد از n امين دوره تيراندازي تمام شود به شرط اينكه A مورد اصابت قرار نگرفته باشد.

ه) احتمال اينكه مبارزه بعد از n امين دوره تيراندازي تمام شود به شرط اينكه هر دو نفر مورد اصابت قرار گرفته باشند.

(الف) براي اينكه A به هدف نزند فقط بايد B به هدف بزند و مسابقه تمام شود حال اين اتفاق در هر مرحلهاي ميتواند اتفاق بيفتد. فرض كنيد B و B_i به ترتيب پيشامد اين باشد كه B به هدف بزند و B در مرحلهي i ام به هدف بزند.

$$P(B_1)=(1-p_A)p_B, P(B_2)=(1-p_A)(1-p_B)(1-p_A)p_B,\ldots,P(B_i)=(1-p_A)^i(1-p_B)^{i-1}p_B$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p_A)^i(1-p_B)^{i-1}p_B=p_B(1-p_A)\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p_A)(1-p_B)]^i$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{p_B(1-p_A)}{p_A+p_B+p_Ap_B}$$

(ب) اگر C پيشامد اين باشد كه هر دو به هدف بزنند. اين پيشامد نيز در هر مرحلهاي ميتواند رخ دهد. فرض كنيد C_i پيشامد اين باشد كه هر دو در مرحلهي i ام به هدف بزنند.

$$P(C_1)=p_Ap_B, P(C_2)=(1-p_A)(1-p_B)p_Ap_B,\ldots,P(C_i)=[(1-p_A)(1-p_B)]^{i-1}p_Ap_B$$

$$P(C)=\sum_{i=1}^{\infty}P(C_i)=p_Ap_B\sum_{i=0}^{\infty}[(1-p)(1-p)]^i=\frac{p_Ap_B}{p_A+p_B-p_Ap_B}$$

(ج) براي اينكه مسابقه در n امين مرحله تمام شود در n-1 مرحله قبل هيچكدام نبايد هدف را زده باشند و در مرحله پاياني هر دو يا فقط A و يا فقط B به هدف زدهاند.

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}(p_A(1-p_B)+p_B(1-p_A)+p_Ap_B)$ از $[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}$ فاكتورگيري شده است.

(د) براي اينكه مسابقه در n امين مرحله تمام شود و A مورد اصابت قرار نگيرد بايد B به هدف نزده باشد و تنهاراه اتمام مسابقه مورد اصابت قرار گرفتن B از طرف A ميباشد.

$$P(A)=[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}p_A(1-p_B)$$

ه) براي اينكه هر دو نفر مورد اصابت قرار گرفته باشند تنها يک حالت داريم و آن اينكه هر دو نفر در n امين تيراندازي موفق به زدن هدف شده باشند بنابراين

$$P(C)=[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}p_Ap_B$$

.60 در يک مسابقه خانوادگي قرار است يک سؤال به يک زوج داده شود كه پاسخ آن «صحيح» يا « غلط» است. اگر زن و شوهر به طور مستقل پاسخ مناسب را با احتمال P بدهند. كدام يک از حالتهاي زير براي برنده شدن زوج بهتر است؟

الف) يكي از آنها را انتخاب و اجازه دهيم او پاسخ دهد.

ب) هر دو نفر سؤال را بررسي نموده و پس از توافق، يكي از آنها پاسخ را اعلام نمايد و يا اگر توافق نداشتند يک سكه را پرتاب و بر اساس نتيجه آن پاسخ دهند.

(الف) A پيشامد اينكه آنها برنده شوند

$$P(A)=P(A|M)P(M)+P(A|F)P(F)=p\frac{1}{2}+p\frac{1}{2}=p$$

(ب) B پيشامد اينكه آنها توافق داشته باشند.

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)$$

C پيشامد اينكه هر دو پاسخ صحيح بدهند.

برای به توافق رسیدن هر دو باید پاسخ مشابه بدهند بنابراین یا هر دو جواب درست یا هر دو جواب نادرست می‌دهند.

$$P(B)=P(B\cap C)+P(B\cap C^c)=p^2+(1-p)^2$$

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)=p^2(p^2+(1-p)^2)+\frac{1}{2}[1-(p^2+(1-p)^2)]$$

61. در مسأله 60، اگر $P=0.6$ باشد و آنها روش بند (ب) را به کار ببرند، مطلوب است احتمال اینکه زوج پاسخ صحیح دهند به شرط اینکه

الف) آنها به توافق برسند.

ب) آنها به توافق نرسند.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

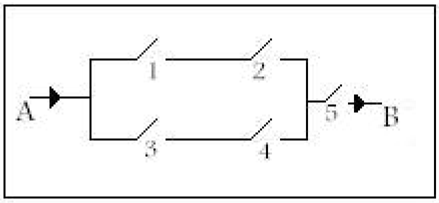
همان‌طور که در مسئله قبل دیدیم $P(B)=p^2+(1-p)^2$ و در نتیجه $P(B)=\frac{52}{100}$

$$P(AB)=p^2=\frac{36}{100}\quad\Rightarrow\quad P(A|B)=\frac{36/100}{52/100}=\frac{9}{13}$$

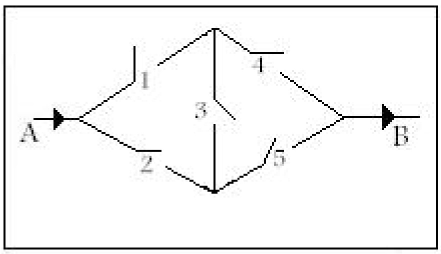
ب) $P(A|B^c)=\frac{1}{2}$

62. احتمال بسته شدن رله i ام ($i=1، 2، 3، 4، 5$) در مدارهاي زير برابر با P_i است. اگر همه رله‌ها به طور مستقل عمل کنند، احتمال اینکه جریان از نقطه A به نقطه B عبور کند را در هر یک از مدارهاي زير به دست آوريد.

راهنمايي: براي بند (ب) روي پيشامد اينكه رله 3 عمل نكند مشروط كنيد.



الف)



ب)

پيشامدهاي A، B، C، D و E را به ترتيب براي بسته بودن رله‌هاي 1 تا 5 و پيشامد F را براي برقرار بودن جريان به كار مي‌بريم.

(الف) در شكل الف براي برقرار بودن جريان روي رله 5 شرطي مي‌كنيم زيرا اگر رله 5 باز باشد جريان برقرار نيست.

$$P(F)=P(F|E)P(E)+P(F|E^c)P(E^c)=P(F|E)P(E)=$$
$$=P((A\cap B)\cup(C\cap D)|E)P(E)=P(A\cap B|E)P(E)+P(C\cap D|E)P(E)=$$
$$=[P_1P_2+P_3P_4]P_5$$

(ب) $$P(F)=P(F|C)P(C)+P(F|C^c)P(C^c)$$

$$P(F|C)P(C)=P((A\cup B)(E\cup D)|C)P(C)=P(A\cup B|C)P(C)\times P(E\cup D|C)P(C)=$$
$$=[P(A|C)P(C)+P(B|C)P(C)][P(E|C)P(C)+P(D|C)P(C)]=P_3^2[P_1+P_2][P_4+P_5]$$
$$P(F|C^c)P(C^c)=P((A\cap D)\cup(B\cap E)|C^c)P(C^c)=P(A\cap D|C^c)P(C^c)+$$
$$+P(B\cap E|C^c)P(C^c)=P_1P_4(1-P_3)+P_2P_5(1-P_3)=(P_1P_4+P_2P_5)(1-P_3)$$
$$P(F)=P_3^2[P_1+P_2][P_4+P_5]+(P_1P_4+P_2P_5)(1-P_3)$$

63. يک سيستم مهندسي که از n جزء تشکيل شده باشد را يک سيستم « k از n » گويند ($k \le n$) هر گاه کار کردن سيستم مشروط به کار کردن حداقل k جزء باشد. فرض کنيد همه اجزاء به طور مستقل کار کنند.

الف) اگر i امين جزء با احتمال P_i (i= 1، 2، 3، 4) کار کند احتمال کار کردن يک سيستم «2 از 4» را به دست آوريد.

ب) بند (الف) را براي سيستم «3 از 5 » تکرار کنيد.

ج) اگر $P_i = P$ (i= 1، 2، ... ، n)، احتمال کار کردن يک سيستم « k از n » را به دست آوريد.

(الف) A، B و C به ترتيب پيشامد اينکه سيستم کار نکند، فقط يک جزء کار کند و هيچ جزئي کار نکند باشند.
براي اينکه يک سيستم 2 از 4 کار کند بايد حداقل 2 جزء از 4 جزء کار کند پس براي اينکه سيستم کار نکند بايد فقط يک جزء کار کند يا هيچ جزئي کار نکند. بنابراين

$$P(A) = P(B) + P(C)$$
$$P(B) = P_1(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4) + P_2(1-P_1)(1-P_3)(1-P_4) + P_3(1-P_1)(1-P_2)(1-P_4) + P_4(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$$
$$P(C) = (1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)(1-P_4)$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

(ب) <u>اين قسمت نيز مانند قسمت قبل بدست مي‌آيد.</u>

(ج) براي اينکه يک سيستم k از n کار کند بايد حداقل k جزء آن کار کنند. اگر A و A_i به ترتيب پيشامد اينکه سيستم و i جزء سيستم کار کند باشند.

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, P(A_{k+1}) = \binom{n}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$$
$$P(A) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i}$$

64. در مسأله 62 بند (الف) احتمال اينکه رله 1 و 2 هر دو بسته باشند به شرط اينکه جريان بين A و B عبور کند را به دست آوريد.

فرض مي‌کنيم C، D و E به ترتيب نشان دهنده پيشامد اينکه رله اول، رله دوم بسته است و جريان بين AB برقرار است، باشد.

$$P(CD \mid E) = \frac{P(E \mid CD)P(CD)}{(P_1P_2 + P_3P_4)P_5} = \frac{p_5 p_1 p_2}{(P_1P_2 + P_3P_4)P_5}$$
$$P(E \mid CD) = P(E \mid CDF)P(F \mid CD) + P(E \mid CDF^c)P(F^c \mid CD) = 1 \times p_5 + 0 \times (1-p_5)$$

65. يک موجود زنده داراي يک زوج از هر کدام از 5 ژن است که آنها را با حروف الفباي انگليسي نشان مي‌دهيم. هر ژن به دو صورت ظاهر مي‌شود که آنها را با حروف بزرگ و کوچک نشان داده به طوري که حرف بزرگ نشان دهنده ژن غالب است. يعني اگر موجود داراي زوج Xx باشد آنگاه شکل ظاهري به صورت ژن X است. مثلاً اگر X براي چشم قهوه‌اي و x براي چشم آبي باشد؛ آنگاه، موجودي که XX يا xX را داشته باشد داراي چشم قهوه‌اي است و موجودي که xx را داشته باشد چشمان آبي دارد. ويژگي ظاهري يک موجود را «فنوتيپ» و ساختار ژنتيکي او را « ژنوتيپ» گويند. (بنابراين دو موجود يکي با ترکيب ژني aA، bB، cc، dD و ee و ديگري با ترکيب AA، BB، cc، DD و ee داراي ژنوتيپهاي متفاوت بوده ولي فنوتيپهاي يکسان دارند.) در جفتگيري دو موجود هر کدام به تصادف در واگذاري يکي از زوج ژنها مشارکت دارد. در 5 زوج ژنهاي يک موجود زنده فرض مي‌شود که هرکدام به طور مستقل و همچنين مستقل از ژن طرف مقابل واگذاري انجام گيرد. در يک جفتگيري بين دو موجود زنده که داراي ژنوتيپهاي aA، bB، cC، dD، eE و aa، bB، cc، dD، ee هستند. مطلوب است احتمال اينکه مولود آنها (1) به طور فنوتيپ (2) به طور ژنتيپ شبيه،

الف) موجود اول باشد. ب) موجود دوم باشد.

ج) هر دو موجود باشد. د) هيچکدام از آنها نباشد.

پيشامد اينکه شخص داراي ژن به‌خصوصي باشد را با همان حرف مربوط به ژن نمايش مي‌دهيم.

1- از نظر فنوتيپ:

(الف) اگر بخواهد به صورت فنوتيپ شبيه موجود اول باشد بايد داراي ژن‌هاي A، B، C، D و E باشد.

$$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) = P(A)P(B)P(C)P(D)P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{128}$$

(ب) اگر بخواهد به صورت فنوتيپ شبيه موجود دوم باشد بايد داراي ژن‌هاي aa، B، cc، D و ee باشد.

$$P(aaBccDee) = P(aa)P(B)P(cc)P(D)P(ee) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{128}$$

(ج) شبيه هر دو موجود باشد يعني اينكه بعضي از خصوصيات موجود اول و بعضي از خصوصيات موجود دوم را داشته باشد يعني يا شبيه موجود اول يا شبيه موجود دوم باشد. اگر شبيه موجود اول و دوم را به ترتيب با S و T نشان دهيم آنگاه:

$$P(S\bigcup T)=P(S)+P(T)-P(S\bigcap T)=\frac{9}{128}+\frac{9}{128}-0=\frac{18}{128}$$

(د)
$$P(S^c\bigcap T^c)=P(S\bigcup T)^c=1-P(S\bigcup T)=1-\frac{18}{128}=\frac{110}{128}$$

2- از نظر ژنوتيپ:

(الف)

$$P(aA\bigcap bB\bigcap cC\bigcap dD\bigcap eE)=P(aA)+P(bB)+P(cC)+P(dD)+P(eE)=$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{128}$$

(ب)

$$P(aa\bigcap bB\bigcap cc\bigcap dD\bigcap ee)=P(aa)+P(bB)+P(cc)+P(dD)+P(ee)=$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{128}$$

(ج)
$$P(S\cup T)=\frac{4}{128}+\frac{4}{128}-0=\frac{8}{128}$$

(د)
$$P(S^c\bigcap T^c)=P(S\bigcup T)^c=1-P(S\bigcup T)=1-\frac{8}{128}=\frac{120}{128}$$

66. با احتمال $\frac{1}{2}$، ملكه حامل ژن هموفيلي است. اگر او حامل ژن باشد آنگاه هر فرزند او با احتمال $\frac{1}{2}$ بيماري هموفيلي را خواهد داشت. اگر ملكه سه فرزند سالم داشته باشد احتمال اينكه او حامل ژن هموفيلي باشد چقدر است؟ اگر ملكه فرزند چهارمي به دنيا آورد احتمال اينكه او هموفيلي باشد چقدر است؟

از پيشامدهاي A، B، C و D به ترتيب براي نشان دادن اينكه ملكه حامل ژن هموفيلي است، آنرا به بچه خود منتقل مي‌كند، سه فرزند سالم دارد و فرزند چهارم هموفيلي است استفاده مي‌كنيم.

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\,|\,C)=\frac{P(C\,|\,A)P(A)}{P(C)}=\frac{1/8\times 1/2}{9/16}=\frac{1}{9}$$

$$P(C)=P(C\,|\,A)P(A)+P(C\,|\,A^c)P(A^c)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

$$P(D\,|\,C)=\frac{P(C\bigcap D\,|\,A)P(A)+P(C\bigcap D\,|\,A^c)P(A^c)}{P(C)}=\frac{1/32+0}{9/16}=\frac{1}{18}$$

67. در صبح روز 31 سپتامبر 1982، ركورد برنده – بازنده سه تيم مهم بيسبال در يكي از ايالتهاي آمريكا به صورت زير گزارش داده شده است:

تيم	برنده	بازنده
آتلانتا	87	72
سانفرانسيسكو	86	73
لوس آنجلس	86	73

هر تيم سه بازي باقي‌مانده ديگر را بايد انجام دهد. هر سه بازي باقي‌مانده تيم سانفرانسيسكو با تيم لوس‌آنجلس است و سه بازي تيم آتلانتا با تيم سان‌دياگو انجام مي‌گيرد. فرض كنيد نتايج بازيهاي باقي‌مانده مستقل از يكديگر بوده و در هر مسابقه شانس برد براي طرفين يكسان باشد. احتمال برد نهايي هر يک از تيمها را به دست آوريد.(اگر دو تيم براي مقام اول مساوي باشند بايد يک بازي نهايي انجام دهند كه هر تيم شانس مساوي برد را دارد.)

فرض کنيد A، B و C به ترتيب پيشامد برد نهايي تيمهاي آتلانتا، سانفرانسيسکو و لوس‌آنجلس باشد. حال براي اينکه تيم آتلانتا قهرمان شود چند حالت وجود دارد:

I. هر سه بازي خود را ببرد. (نتايج بازي تيمهاي ديگر بي‌تأثير است.)
II. دو بازي خود را ببرد و يک بازي را بازنده شود و تيم سانفرانسيسکو (يا لوس‌آنجلس) 3 بازي را برنده شود و بازي نهايي بين تيم آتلانتا و سانفرانسيسکو (يا لوس‌آنجلس) به سود آتلانتا تمام شود.
III. دو بازي را ببرد و تيم سانفرانسيسکو (يا لوس‌آنجلس) دو بازي را ببرد.
IV. يک بازي را ببرد و تيم سانفرانسيسکو (يا لوس‌آنجلس) دو بازي را ببرد و بازي نهايي بين تيم آتلانتا و سانفرانسيسکو (يا لوس‌آنجلس) به سود آتلانتا تمام شود.

(دقت کنيد که حالت II، III و IV داراي دو حالت سانفرانسيسکو يا لوس‌آنجلس مي‌باشد که با توجه به شرايط مفروض در مسئله اين دو حالت داراي احتمال برابر هستند و بنابراين براي محاسبه از يک ضريب دو استفاده مي‌کنيم.)

$$P(I)=\frac{\binom{3}{3}}{8},P(II)=\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{\binom{3}{3}}{8}\times\frac{1}{2}\times 2,P(III)=\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{\binom{3}{2}}{8}\times 2,P(IV)=\frac{\binom{3}{1}}{8}\times\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{1}{2}\times 2$$

$$P(A)=P(I\cup II\cup III\cup IV)=P(I)+P(II)+P(III)+P(IV)=\frac{8}{64}+\frac{3}{64}+\frac{18}{64}+\frac{9}{64}=\frac{38}{64}$$

براي اينکه تيم لوس‌آنجلس قهرمان شود چند حالت وجود دارد:

I. هر سه بازي را تيم لوس‌آنجلس ببرد و تيم آتلانتا دو برد داشته باشد و بازي نهايي بين تيم آتلانتا و لوس‌آنجلس به سود لوس‌آنجلس تمام شود.
II. هر سه بازي را تيم لوس‌آنجلس ببرد و تيم آتلانتا يک برد داشته باشد.
III. هر سه بازي را تيم لوس‌آنجلس ببرد و تيم آتلانتا برد نداشته باشد.
IV. دو بازي را تيم لوس‌آنجلس ببرد و تيم آتلانتا يک برد داشته باشد و بازي نهايي بين تيم آتلانتا و لوس‌آنجلس به سود لوس‌آنجلس تمام شود.
V. دو بازي را تيم لوس‌آنجلس ببرد و تيم آتلانتا برد نداشته باشد.

$$P(I)=\frac{\binom{3}{3}}{8}\times\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{1}{2},P(II)=\frac{\binom{3}{3}}{8}\times\frac{\binom{3}{1}}{8},P(III)=\frac{\binom{3}{3}}{8}\times\frac{\binom{3}{0}}{8},P(IV)=\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{\binom{3}{1}}{8}\times\frac{1}{2}$$

$$P(V)=\frac{\binom{3}{2}}{8}\times\frac{\binom{3}{0}}{8}$$

$$P(C)=P(I)+P(II)+P(III)+P(IV)+P(V)=\frac{1.5}{64}+\frac{3}{64}+\frac{1}{64}+\frac{4.5}{64}+\frac{3}{64}=\frac{13}{64}$$

با توجه به ساختار مسئله احتمال قهرمان شدن تيم سانفرانسيسکو نيز به صورت تيم لوس‌آنجلس مي‌باشد.

$$P(B)=\frac{13}{64}$$

68. شوراي يک شهر متشکل از 7 عضو است که يک گروه 3 عضوي دارد. نظريه‌هاي جديد در مورد يک قانون ابتدا در گروه مطرح شده و سپس اگر حداقل 2 نفر از 3 نفر موافقت نمايند آن را در شورا مطرح مي‌کنند. روزي قانوني در شوراي شهر مطرح شد که براي تصويب نياز به حداقل 4 رأي مثبت داشت. حال اگر هر عضو شورا به طور مستقل با احتمال P به قانون رأي دهد. احتمال اين پيشامد که رأي يکي از اعضاي گروه سرنوشت ساز باشد، يعني، اگر رأي خود را عوض کند قانون تصويب نشود را به دست آوريد. اين احتمال براي حالتي که عضو سرنوشت ساز از اعضاي گروه نباشد چيست؟

با توجه به اینکه قانون در شورا مطرح شده است بنابراین باید حداقل 2 نفر از 3 نفر به آن رأی داده باشند و چون در اینجا باید رأی یکی از اعضای گروه سرنوشت ساز باشد بنابراین رأی نفر سوم برای ما حیاتی است در نتیجه از بین 4 نفر باقی‌مانده تنها یک نفر به قانون رأی داده است.

$$P(A)=\binom{4}{1}p(1-p)^3$$

برای اینکه عضو سرنوشت‌ساز از اعضای گروه نباشد باید دو نفر از اعضای شورا (غیر از سه نفر اعضای گروه) رأی دهند.

$$P(B)=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$$

69. فرض کنيد هر طفلي که به دنيا مي‌آيد با شانس برابر، پسر يا دختر و مستقل از جنس ساير فرزندان باشد. براي زوجي که 5 فرزند دارند، احتمال پيشامدهاي زير را به دست آوريد:

الف) همه فرزندان از يک جنس باشند.

ب) 3 فرزند بزرگـتر پسر و دو نفر ديگر دختر باشند.
ج) دقيقاً 3 فرزند پسر باشند.
د) 2 فرزند بزرگـتر دختر باشند.
ه) حداقل يک فرزند دختر باشد.

اگر از B و G به ترتيب براي اشاره به پيشامد پسر و دختر بودن استفاده كنيم آنگاه:

(الف) $P(BBBBB \cup GGGGG) = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{16}$

(ب) $P(BBBGG) = \frac{1}{32}$

(ج) $\binom{5}{3}P(BBBGG) = \frac{1}{32}\times 10 = \frac{5}{16}$

(د) در اين قسمت براي سه فرزند كوچكتر هيچ شرطي وجود ندارد بنابراين حالتهاي مختلف را بايد مد نظر قرار دهيم. اگر پيشامد 2 فرزند بزرگـتر دختر باشند را با A و تعداد i پسر در سه فرزند باقي ماند را با B_i نشان دهيم:

$$P(A) = P(AB_0 \cup AB_1 \cup AB_2 \cup AB_3) = P(AB_0) + P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) =$$

$$= P(A)[P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)] = \frac{1}{4}[\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}] = \frac{1}{4}$$

(ه) ابتدا احتمال اينكه هيچ فرزندي دختر نباشد را به دست مي‌آوريم و سپس از قانون متمم‌گيري استفاده مي‌كنيم. از C براي اشاره به حداقل يک دختر استفاده مي‌كنيم.

$$P(BBBBB) = \frac{1}{32} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

70. A وB يک در ميان يک جفت تاس را پرتاب مي‌كنند تا زماني كه A مجموع 9 و يا B مجموع 6 را به دست آورد. با فرض اينكه A ابتدا تاسها را پرتاب كند احتمال اينكه آخرين پرتاب را نيز A انجام دهد چقدر است؟

پيشامدهاي A، C و D را به ترتيب براي پيروزي A، رخ دادن مجموع 9 و رخ دادن مجموع 6 در نظر مي‌گيريم.

$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c)$$

$$P(A|C) = 1$$

$$P(A|C^c) = P(D^c)P(A)$$

$$P(A) = P(C) + P(D^c)P(A)P(C^c) \ \Rightarrow \ P(A)[1 - P(D^c)P(C^c)] = P(C)$$

$$\Rightarrow P(A)[1 - (1 - \frac{4}{36})(1 - \frac{5}{36})] = \frac{4}{36} \ \Rightarrow \ P(A) = \frac{144}{304} = \frac{9}{19}$$

71. در يک روستا مرسوم است كه پسر بزرگـتر و همسر او مسئوليت نگهداري والدين خود را در دوران كهولت به عهده داشته باشند. در سالهاي اخير زنان روستا به دليل اين مسئوليت تمايلي براي ازدواج با پسر بزرگ خانواده ندارند.

الف) اگر هر خانواده در اين روستا داراي دو فرزند باشد چه نسبتي از همه فرزندان پسر، پسر بزرگـتر هستند؟

ب) اگر هر خانواده اين روستا سه فرزند داشته باشند چه نسبتي از همه پسران خانواده، پسر بزرگـتر هستند؟ فرض كنيد هر فرزند به طور مستقل با شانس برابر پسر يا دختر است.

الف) با توجه به اينكه هر خانواده داراي دو فرزند اسـت و $4 = 2^2$ چهار حالت مختلف موجود است بنابراين تعداد فرزندان در فضاي نمونه برابر با $4\times 2 = 8$ مي‌باشد و با توجه به يكسان بودن شانس پسر يا دختر بودن تعداد پسران در كل فضاي نمونه برابر با $8\times\frac{1}{2} = 4$ است. حال با در نظر گرفتن اينكه تنها در يكي از حالات پسر وجود ندارد بنابراين در سه حالت باقي‌مانده پسر وجود دارد كه لاجرم از آنهـا يکـی پسر بزرگ اسـت در نتيجه نسبت فرزندان پسر بزرگـتر نسبت به فرزندان پسر برابر با $\frac{3}{4}$ است.

ب) با توجه به اينكه هر خانواده داراي 3 فرزند است و $2^3 = 8$ حالت مختلف وجود دارد بنابراين تعداد فرزندان در فضاي نمونه برابر با $8\times 3 = 24$ و تعداد فرزندان پسر در كل فضاي نمونه برابر با $24\times\frac{1}{2} = 12$ است. حال با در نظر گرفتن اينكه تنها در يكي از حالات پسر وجود ندارد و در حالاتي كه پسر وجود دارد لاجرم يكي از آنها پسر بزرگـتر است بنابراين نسبت فرزندان پسر بزرگـتر به كـل فرزندان پسر برابر با $\frac{7}{12}$ است.

72. فرض كنيد E و F، دو پيشامد ناسازگار از يک آزمايش باشند. نشان دهيد كه اگر آزمايشهاي ساده مستقل از اين نوع را تكرار كنيم آنگاه E قبل از F با احتمال $P(E)/[P(E)+P(F)]$ اتفاق مي‌افتد.

فرض کنید A_n نشان دهنده‌ی پیشامد ظاهر نشدن E و F در n-1 آزمایش ساده اول و ظاهر شدن E در آزمایش n ام باشد و A پیشامد اینکه Eزودتر از F ظاهر شود.

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F), P(E\cup F)^c=1-P(E)-P(F)$$

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(E)[1-P(E)-P(F)]^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P(E)[1-P(E)-P(F)]^{n}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

73. A و B یک دوره بازي را انجام مي‌دهند. A در هر بازي به طور مستقل با احتمال p و B با احتمال 1 – p برنده است. آنها بازي را زماني متوقف مي‌کنند که جمع تعداد بردهاي يکي از بازيکنها 2 مرتبه بيشتر از بازيکن ديگر باشد و برنده بازي کسي است که تعداد برد بيشتر داشته باشد.

الف) احتمال اینکه جمعاً 4 بازي انجام گيرد را به دست آوريد.

ب) احتمال اینکه A برنده مسابقه باشد را محاسبه کنيد.

(الف) براي اینکه جمعاً 4 بازي انجام گيرد بايد يکي از بازيکنان 1 برد و 3 شکست و ديگري 3 برد و 1 شکست داشته باشد و برنده نهايي مي‌تواند A يا B باشد.

فرض کنيد C و A به ترتيب پيشامد جمعاً 4 بازي انجام گيرد و A برنده نهايي بازي است، باشند.

$$P(C)=P(CA\cup CA^c)=P(CA)+P(CA^c)=\binom{4}{3}p^3(1-p)+\binom{4}{3}p(1-p)^3$$

(ب) برای اینکه A برنده نهایی بازی باشد باید دومین برد بیشتر بی‌نص او شود که این می‌تواند در حالتهای مختلف رخ دهد.

مرحله اول: A بازی اول و دوم را برنده شود.

$$P(A_1)=p^2$$

و به همين ترتيب

$$P(A_2)=\binom{3}{1}p^3(1-p), P(A_3)=\binom{5}{2}p^4(1-p)^2, P(A_i)=\binom{2i-1}{i-1}P^{i+1}(1-P)^{i-1}$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

74. *

75. بازيکنهايي با مهارت يکسان در يک مسابقه شرکت مي‌کنند و احتمال اینکه يکي از دو بازيکن برنده شود برابر با $\frac{1}{2}$ است. يک گروه 2^n نفري را به تصادف به صورت زوجهايي تقسيم نموده که در مقابل يکديگر بازي کنند. پس از آن 2^{n-1} نفر برنده را نيز به صورت زوجهاي ديگري به تصادف تقسيم نموده و اين کار ادامه مي‌يابد تا يک نفر برنده باقي بماند. دو بازيکن A و B را در نظر گرفته و پيشامدهاي A_i (i = 1، ... ، n) و E را به صورت زير تعريف مي-کنيم:

A_i: A دقيقاً در i بازي شرکت کند

E: A و B هميشه در مقابل يکديگر بازي کنند

الف) مطلوب است $P(A_i)$ $(i=1,\cdots,n)$

ب) مطلوب است P(E)

ج) اگر $P_n=P(E)$ ، نشان دهيد

$$P=\frac{1}{2^n-1}+\frac{2^n-2}{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2P_{n-1}$$

با استفاده از اين رابطه، نتيجه به دست آمده در بند (ب) را کنترل کنيد.

راهنمايي: P(E) را با مشروط کردن روي اینکه کدام يک از پيشامدهاي A_i (i = 1، ... ، n) اتفاق مي‌افتد به دست آوريد. آنگاه پاسخ به دست آمده را با توجه به رابطه جبري زير ساده کنيد.

$$\sum_{i=1}^{n-1}ix^{i-1}=\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

براي روش ديگري جهت حل اين مسأله توجه کنيد که جمعاً 2^n-1 بازي انجام مي‌گيرد.

د) توضيح دهيد که چرا 2^n-1 بازي انجام مي‌گيرد. اين بازيها را بشماريد و فرض کنيد B_i نشان دهنده پيشامدي باشد که A و B در بازي i ام با يکديگر بازي مي‌کنند $(i=1,\cdots,2^n-1)$.

ه) مطلوب است $P(B_i)$

و) نتيجه بند (ه) را براي محاسبه $P(E)$ به کار بريد.

(الف) با توجه به اینکه هر بازیکن حتماً یک مرحله بازی می‌کند بنابراین $P(A_1)=1$ و برای اینکه بازیکنی به مرحله دوم برسد باید مرحله اول را برنده شود و پس از آن حتماً در مرحله دوم شرکت می‌کند.

$$P(A_2)=\frac{1}{2}\times 1,\cdots,P(A_i)=(\frac{1}{2})^{i-1}\times 1$$

76. یک سرمايه گذار در بازار بورس سهامي دارد که ارزش آن 25 واحد است. او تصمیم گرفته است که سهم خود را در صورتي که ارزش آن 10 واحد کم شود و يا به 40 واحد برسد بفروشد. اگر هر تغيير در قيمت به اندازه 1 واحد با احتمال 0.55 افزايش و با احتمال 0.45 کاهش داشته باشد و همچنين تغييرات متوالي مستقل باشند، با چه احتمالي سرمايه گذار به صورت برنده بازنشست مي‌شود؟

براي اينکه سرمايه‌گذار به صورت برنده بازنشست شود باید به 15 پيروزي قبل از 10 شکست برسد یعنی باید حداکثر به 9 شکست در 24 بار سرمایه‌گذاری برسد. در نتیجه احتمال مورد نظر به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum_{k=15}^{24}\binom{24}{24-k}(0.55)^{15}(0.45)^{24-k}$$

77. A و B به پرتاب سکه مي‌پردازند، A بازي را شروع مي‌کند و آنقدر ادامه مي‌دهد که خط ظاهر شود. در اين حالت، B پرتاب را شروع مي‌کند و او نيز آنقدر پرتاب مي‌کند تا خط ظاهر شود، آنگاه سکه را به A مي‌دهد و به همين ترتيب بازي ادامه مي‌يابد. اگر P_1 احتمال آمدن شير توسط A و P_2 احتمال شير آمدن توسط B باشد و برنده بازي کسي باشد که

الف) 2 شير به طور متوالي بياورد.

ب) 3 شير به طور متوالي بياورد.

احتمال برنده شدن A در هر يک از حالتهاي فوق را به دست آوريد.

(الف) برای اینکه Aدر مرحله اول برنده شود باید دو شیر متوالی بیاورد: $P(A_1)=p_1^2$

برای اینکه A در مرحله دوم برنده شود باید در مرحله اول برنده نشود (در پرتاب اول خط بیاورد یا در پرتاب اول شیر و در پرتاب دوم خط بیاورد) و فرد B نیز نباید موفق شود (در پرتاب اول خط بیاورد یا در پرتاب اول شیر و در پرتاب دوم خط بیاورد) و فرد A در مرحله دوم دو شیر بیاورد.

$$P(A_2)=[(1-p_1)+p_1(1-p_1)][(1-p_2)+p_2(1-p_2)]p_1^2$$

و به همین ترتیب

$$P(A_3)=\{[(1-p_1)+p_1(1-p_1)][(1-p_2)+p_2(1-p_2)]\}^2 p_1^2$$
$$P(A_i)=\{[(1-p_1)+p_1(1-p_1)][(1-p_2)+p_2(1-p_2)]\}^{i-1} p_1^2$$

و در نتیجه

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\{[(1-p_1)+p_1(1-p_1)][(1-p_2)+p_2(1-p_2)]\}^i p_1^2=\frac{p_1^2}{p_1^2+p_2^2-p_1^2p_2^2}$$

می‌توان نشان داد که احتمال برنده شدن B برابر با $\frac{p_2^2-p_1^2p_2^2}{p_1^2+p_2^2-p_1^2p_2^2}$ می‌باشد.

(ب) برای اینکه Aدر مرحله اول برنده شود باید سه شیر متوالی بیاورد: $P(A_1)=p_1^3$

برای اینکه A در مرحله دوم برنده شود باید در مرحله اول برنده نشود (در پرتاب اول خط بیاورد یا در پرتاب اول شیر و در پرتاب دوم خط بیاورد یا در دو پرتاب اول شیر و در پرتاب سوم خط بیاورد) و فرد B نیز نباید موفق شود (در پرتاب اول خط بیاورد یا در پرتاب اول شیر و در پرتاب دوم خط بیاورد یا در دو پرتاب اول شیر و در پرتاب سوم خط بیاورد) و فرد A در مرحله دوم سه شیر بیاورد.

$$P(A_2)=[p_1^2(1-p_1)+(1-p_1)+p_1(1-p_1)][p_2^2(1-p)+(1-p_2)+p_2(1-p_2)]p_1^3$$

و به همین ترتیب

$$P(A_i)=\{[p_1^2(1-p_1)+(1-p_1)+p_1(1-p_1)][p_2^2(1-p)+(1-p_2)+p_2(1-p_2)]\}^{i-1}p_1^3$$

و در نتیجه

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\frac{p_1^3}{p_1^3+p_2^3-p_1^3p_2^3}$$

می‌توان نشان داد که احتمال برنده شدن B برابر با $\frac{p_2^3-p_1^3p_2^3}{p_1^3+p_2^3-p_1^3p_2^3}$ می‌باشد.

78. تاس Aداراي 4 وجه قرمز و 2 وجه سفيد و تاس B داراي 2 وجه قرمز و 4 وجه سفيد است. يک سکه را پرتاب مي‌کنيم، اگر شير ظاهر شود بازي را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B بازي را انجام مي‌دهيم.

الف) نشان دهيد که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب $\frac{1}{2}$ است.

ب) اگر دو پرتاب اوليه قرمز باشد احتمال اينکه نتيجه سومين پرتاب قرمز باشد چقدر است؟

ج) اگر دو پرتاب اوليه قرمز باشد احتمال اينکه تاس A پرتاب شده باشد را به دست آوريد.

اگر از A، B و R به ترتيب براي نشان دادن پرتاب تاس A، پرتاب تاس B و پيشامد قرمز آمدن استفاده کنيم.

(الف)

$$P(R) = P(R\mid A)P(A) + P(R\mid B)P(B)$$
$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(ب)

$$P(RRR\mid RR) = \frac{P(RRR)}{P(RR)} = \frac{1/6}{5/18} = 0.6$$

$$P(RRR) = P(RRR\mid A)P(A) + P(RRR\mid B)P(B) = \frac{8}{27}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{27}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(RR) = P(RR\mid A)P(A) + P(RR\mid B)P(B) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

(ج)

$$P(A\mid RR) = \frac{P(RR\mid A)P(A)}{P(RR)} = \frac{4/18}{5/18} = 0.8$$

79. در ظرفي 12 توپ داريم که 4 تاي آن سفيد است. سه بازيکن A، B و C به طور متوالي به صورت ابتدا A سپس B و آنگاه C و دوباره A، B و C ... از ظرف يک توپ انتخاب مي‌کنند. برنده کسي است که براي اولين بار توپ سفيد بيرون آورد. احتمال برد براي هر بازيکن را در حالتهاي زير به دست آوريد:

الف) هر توپ پس از انتخاب به ظرف برگردانده شود.

ب) توپهاي انتخاب شده به ظرف برگردانده نشود.

الف) برای اینکه A برنده شود باید زودتر از بقیه توپ سفید را از ظرف خارج کند. بنابراین ای در گام اول موفق می‌شود یا در مرحله اول هر سه شکست می‌خورند و در مرحله بعد A توپ سفید را از ظرف خارج می کند و به همین ترتیب مراحل بعدی انجام می شود.

A_iپیشامد اینکه A در محله i برنده شود.

$$P(A_1) = \frac{4}{12}, P(A_2) = \frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}, P(A_3) = [(\frac{8}{12})^3]^2\frac{4}{12}$$

$$P(A_i) = [(\frac{8}{12})^3]^{i-1}\frac{4}{12}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}[(\frac{8}{12})^3]^{i-1}\frac{4}{12} = 0.47368$$

برای اینکه B برنده شود باید زودتر از بقیه توپ سفید را از ظرف خارج کند. بنابراین ای در گام اول دی‌با A شکست خورده و او موفق شود یا در مرحله اول هر سه شکست می‌خورند و در مرحله بعد A شکست خورده و او توپ سفید را از ظرف خارج می کند و به همین ترتیب مراحل بعدی انجام می شود.

$$P(B_1) = \frac{8}{12}\frac{4}{12}, P(B_2) = \frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}, P(B_3) = [(\frac{8}{12})^3]^2[\frac{8}{12}\frac{4}{12}]$$

$$P(B_i) = [(\frac{8}{12})^3]^{i-1}[\frac{8}{12}\frac{4}{12}]$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty}P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty}[(\frac{8}{12})^3]^{i-1}[\frac{8}{12}\frac{4}{12}] = 0.315789$$

برای اینکه C برنده شود باید زودتر از بقیه توپ سفید را از ظرف خارج کند. بنابراین ای در گام اول دی‌با A,B شکست خورده و او موفق شود یا در مرحله اول هر سه شکست می‌خورند و در مرحله بعد A,B شکست خورده و او توپ سفید را از ظرف خارج می کند و به همین ترتیب مراحل بعدی انجام می شود.

$$P(C_1)=\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12},P(C_2)=\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12},P(C_3)=[(\frac{8}{12})^3]^2[\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}]$$

$$P(C_i)=[(\frac{8}{12})^3]^{i-1}[\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}]$$

$$P(C)=\sum_{i=1}^{\infty}P(C_i)=\sum_{i=1}^{\infty}[(\frac{8}{12})^3]^{i-1}[\frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}]=0.210526$$

ب) یش کاهش مین تعداد توپها پس از هر آزمایوجود ندارد بنابرا یگذارین قسمت چون جایدر ا ابدی

$$P(A_1)=\frac{4}{12},P(A_2)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{4}{9},P(A_3)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6},P(A_4)=0$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.4667$$

$$P(B_1)=\frac{8}{12}\frac{4}{11},P(B_2)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8},P(B_3)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5},P(B_4)=0$$

$$P(B)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0.321212$$

$$P(C_1)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{4}{10},P(C_2)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{4}{7},P(C_3)=\frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{4}{4},P(C_4)=0$$

$$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)=0.2121$$

80. مسأله 79 را بدین صورت تکرار کنید که هر سه بازیکن از ظرف متعلق به خود که داراي 12 توپ است و 4 تاي آن سفید است انتخاب کند.

قسمت الف مانند سوال قبل به دست می آید و در قسمت(ب) نیز روش کار همانند قبل است با این تفاوت که انتخاب یک توپ فقط تعداد توپهای همان شخص را تحت تاثیر قرار می دهد.

81. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه مستقل و همشانس از هر یک از 2^n زیر مجموعه $S=\{1,2,\cdots,n\}$ باشند.

الف) نشان دهید که

$$P\{A\subset B\}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

راهنمايي: اگر $N(B)$ نشان دهنده تعداد عضوهاي B باشد. از رابطه زیر استفاده کنید:

$$P\{A\subset B\}=\sum_{i=0}^{n}P\{A\subset B\mid N(B)=i\}P\{N(B)=i\}$$

ب) نشان دهید

$$P\{AB=\phi\}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

الف) برای اینکه A زیر مجموعه B باشد باید هر عضوی که درون A هست درون B نیز باشد حال اگر B دارای i عضو باشد A برای اینکه زیر مجموعه B باشد 2^i حق انتخاب دارد زیرا هر عضو B دو حق انتخاب دارد یا متعلق به A هست یا نیست و در حالت کلی نیز 2^n حق انتخاب دارد بنابراین

$$P(A\subset B\mid N(B)=i)=\frac{2^i}{2^n}$$

حال باید احتمال اینکه B دارای i عضو باشد را به دست آوریم

$$P(N(B)=i)=\frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

$$P(A\subset B)=\sum_{i=0}^{n}P(A\subset B|N(B)=i)P(N(B)=i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{2^n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n}=\frac{1}{4^n}\sum_{i=0}^{2}2^i\binom{n}{i}$$
$$=\frac{1}{4^n}(1+2)^n=(\frac{3}{4})^n$$

در اینجا نیز بر روی تعداد اعضای مجموعه B مشروط می کنیم اگر B تهی باشد اشتراک هر مجموعه ای با آن تهی است بنابراین A ، 2^n حق انتخاب دارد

$$P(A\bigcap B=\phi\,|\,N(B)=0)=\frac{2^n}{2^n}=1$$

اگر B دارای i عضو باشد برای اینکه اشتراک مجموعه ی A با آن تهی باشد A باید اعضای خود را از بین n-i عنصر باقی مانده انتخاب کند بنابراین

$$P(A\bigcap B=\phi\,|\,N(B)=i)=\frac{2^{n-i}}{2^n}$$

و اگر B دارای n عضو باشد A تنها می تواند تهی باشد

$$P(A\bigcap B=\phi\,|\,N(B)=n)=\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n-n}}{2^n}$$

و بنابراین

$$P(A\bigcap B=\phi)=\sum_{i=0}^{n}P(A\bigcap B=\phi\,|\,N(B)=i)P(N(B)=i)$$

$$P(A\bigcap B=\phi)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2^{n-i}}{2^n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n}=\frac{1}{4^n}\sum_{i=0}^{n}2^{n-i}\binom{n}{i}=(\frac{3}{4})^n$$

82. در مثال 5 – 4 احتمال پیشامد اینکه i امین سکه انتخاب شده باشد به شرط اینکه همه n پرتاب اولیه شیر ظاهر شده است را به دست آورید.

فرض کنید $(i=0,1,\cdots,k)C_i$ نشان دهنده این باشد که i امین سکه به تصادف انتخاب شده و F_n نشان دهنده پیشامدی باشد که n پرتاب اول همگی شیر باشند

$$P(C_i\,|\,F_n)=\frac{P(F_n\,|\,C_i)P(C_i)}{\sum_{j=0}^{k}P(F_n\,|\,C_j)P(C_j)}=\frac{\left(\frac{i}{k}\right)^n\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^n\left(\frac{1}{k+1}\right)}=\frac{\left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^n}$$

83. در قاعده توالي لاپلاس (مثال 5 – 4) آيا نتيجه پرتابهاي متوالي مستقل هستند؟ شرح دهيد.
بله، مستقل هستند زيرا زماني كه يک سكه انتخاب شد (مثلاً سكهي i ام) آنگاه احتمال رخ دادن شير در هر پرتاب آن مستقل از پرتابهاي قبل و بعد (و برابر با $\frac{i}{k}$) ميباشد.

84. متهمي كه توسط 3 قاضي محاكمه ميشود، گناهكار اعلام ميشود اگر حداقل 2 نفر رأي به گناهكاري او بدهند. فرض كنيد وقتي كه متهم واقعاً گناهكار باشد هر يک از قضات به طور مستقل با احتمال 0.7 رأي به گناهكاري او بدهند و هرگاه متهم واقعاً بيگناه باشد احتمال به گناهكاري توسط هر قاضي به 0.2 كاهش يابد. اگر 70 درصد از متهمان گناهكار باشند احتمال اينكه قاضي سوم رأي به گناهكاري بدهد را به شرط هر يک از حالتهاي زير به دست آوريد:

الف) قاضي اول و دوم رأي به گناهكاري دادهاند.

ب) يكي از دو قاضي اول و دوم رأي به گناهكاري و ديگري رأي به بيگناهي دادهاند.

ج) قاضي اول و دوم هر دو رأي به بيگناهي دادهاند.

اگر E_i $(i = 1، 2، 3)$ نشان دهنده پيشامدي باشد كه قاضي i ام رأي به گناهكاري بدهد. آيا اين پيشامدها مستقلند؟ آيا پيشامدها به صورت مشروط مستقلند؟ (شرح دهيد).

فرض کنید E_i $(i = 1، 2، 3)$ نشان دهنده پيشامدي باشد كه قاضي i ام رأي به گناهكاري بدهد. و F پیشامد گناهکار بودن یک متهم باشد

$$P(E_3 \mid E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)}$$

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2 \mid F)P(F) + P(E_1E_2 \mid F^c)P(F^c)$$

$$P(E_1E_2) = P(E_1 \mid F)P(E_2 \mid F)P(F) + P(E_1 \mid F^c)P(E_2 \mid F^c)P(F^c)$$

$$P(E_1E_2) = 0.7\times0.7\times0.7 + 0.2\times0.2\times0.3 = 0.355$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3 \mid F)P(F) + P(E_1E_2E_3 \mid F^c)P(F^c)$$

$$P(E_1E_2E_3) = 0.7\times0.7\times0.7\times0.7 + 0.2\times0.2\times0.2\times0.3 = 0.2425$$

$$P(E_3 \mid E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{0.2425}{0.355} = \frac{97}{142}$$

ب) با توجه به اینکه هر سه قاضی در روش قضاوت مانند یکدیگر هستند بنابراین چه قاضی اول و چه قاضی دوم فرد را بی گناه تشخیص دهند تفاوتی در رای قاضی سوم نمی کند بنابراین به دلخواه فرض می کنیم که قاضی اول بی گناه و قاضی دوم گناهکار تشخیص داده است.

$$P(E_3 \mid E_1^cE_2) = \frac{P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1^cE_2)}$$

$$P(E_1^cE_2) = P(E_1^cE_2 \mid F)P(F) + P(E_1^cE_2 \mid F^c)P(F^c)$$

$$P(E_1^cE_2) = 0.3\times0.7\times0.7 + 0.8\times0.2\times0.3 = 0.195$$

$$P(E_1^cE_2E_3) = P(E_1^cE_2E_3 \mid F)P(F) + P(E_1^cE_2E_3 \mid F^c)P(F^c)$$

$$P(E_1E_2E_3) = 0.3\times0.7\times0.7\times0.7 + 0.8\times0.2\times0.2\times0.3 = 0.1125$$

$$P(E_3 \mid E_1^cE_2) = \frac{P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1^cE_2)} = \frac{0.1125}{0.195} = \frac{15}{26}$$

ج)

$$P(E_3 \mid E_1^cE_2^c) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3)}{P(E_1^cE_2^c)} = \frac{0.0825}{0.255} = \frac{33}{102}$$

$$P(E_1^cE_2^c) = 0.3\times0.3\times0.7 + 0.8\times0.8\times0.3 = 0.255$$

$$P(E_1^cE_2^cE_3) = 0.3\times0.3\times0.7\times0.7 + 0.8\times0.8\times0.2\times0.3 = 0.0825$$

این پیشامدها به صورت مشروط مستقل هستند زیرا

$$P(E_1) = P(E_1 \mid F)P(F) + P(E_1 \mid F^c)P(F^c) = 0.55$$

$$P(E_2) = P(E_2 \mid F)P(F) + P(E_2 \mid F^c)P(F^c) = 0.55$$

$$P(E_1)\times P(E_2) = 0.3025 \neq 0.355 = P(E_1E_2)$$

85. فرض كنيد n آزمايش مستقل كه نتيجه هر كدام يكي از اعداد 0، 1 يا 2 با احتمالهاي P_0، P_1 و P_2 مي‌باشد ($\sum_{i=0}^{2} P_i = 1$) را انجام دهیم. احتمال اینکه دو نتیجه 1 و 2 حداقل یک بار حاصل شوند را به دست آورید.

ابتدا احتمال اینکه 1 و 2 اصلاً با هم رخ ندهند را به دست آورده سپس با استفاده از قانون متمم گیری احتمال مورد نظر را محاسبه می کنیم.

A پیشامد اینکه در n آزمایش 1 و 2 اصلاً رخ ندهد B_i پیشامد اینکه در n آزمایش i مرتبه 1 و $n-i$ مرتبه صفر رخ دهد C_i پیشامد اینکه در n آزمایش i مرتبه 2 و $n-i$ مرتبه صفر رخ دهد

$$P(A) = P_0^n$$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) = \sum_{i=0}^{n} P_1^i P_0^{n-i} \binom{n}{i} = (p_0 + p_1)^n$$

$$P(C) = \sum_{i=0}^{n} P(C_i) = \sum_{i=0}^{n} P_2^i P_0^{n-i} \binom{n}{i} = (p_0 + p_2)^n$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(A) = (p_0 + p_1)^n + (p_0 + p_2)^n - P_0^n$$

$$P(B \cup C)^c = 1 - P(B \cup C)$$