2
اصول احتمال

1. جعبه‌اي شامل 3 مهره قرمز، سبز و آبي است. آزمايشي را در نظر بگيريد كه از اين جعبه يك مهره انتخاب كرده و سپس آن را به جعبه بازگردانده و مهره دوم را انتخاب مي‌كنيم، فضاي نمونه‌ي آزمايش را تعيين كنيد. مساله را وقتي كه انتخاب دومين مهره بدون جايگذاري اولين مهره انجام مي‌گيرد تكرار كنيد.

S_1 = { (سبز، سبز)، (آبي، قرمز)، (سبز، قرمز)، (قرمز، سبز)، (آبي، سبز)، (قرمز، قرمز) ، (آبي، آبي) ، (قرمز، آبي)، (سبز، آبي)}

S_2 = { (آبي، قرمز)، (سبز، قرمز)، (قرمز، سبز)، (آبي، سبز)، (قرمز، آبي)، (سبز، آبي)}

2 . تاسي را آنقدر پرتاب مي‌كنيم تا عدد 6 ظاهر شود كه در اين صورت آزمايش متوقف مي‌گردد. فضاي نمونه اين آزمايش چيست؟ اگر E_n نشان دهنده پيشامدي باشد كه نياز به n پرتاب داشته باشد تا آزمايش كامل شود، چه نقاطي از فضاي نمونه در E_n قرار دارند؟ احتمال $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ چيست؟

اگر آمدن 6 را با 1 و نيامدن آن را با 0 نشان دهيم فضاي نمونه به صورت زير است:

$$S = \{1,01,001,0001,\cdots,000\cdots0001\}$$

$$E_1 = \{1\},\ E_2 = \{01\},\ E_3 = \{001\},\ \cdots,\ \ E_n = \{\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1\}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{6},\ P(E_2) = \frac{5}{6}\times\frac{1}{6},\ P(E_3) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6},\ P(E_n) = (\frac{5}{6})^{n-1}\times\frac{1}{6}$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6} = 1$$

3. *

4 . افراد A، B و C به نوبت سكه‌اي را پرتاب مي‌كنند و اولين نفري كه شير بياورد برنده است. فضاي نمونه اين آزمايش را مي‌توان به صورت زير تعريف نمود:

$$S = \{1,01,001,0001,\cdots,000\cdots01\}$$

الف) فضاي نمونه را تفسير كنيد.

ب) پيشامدهاي زير را با استفاده از اعضاي S تعريف كنيد:

A برنده شود = A

B برنده شود = B

$(A \cup B)^c$

فرض كنيد A ابتدا سكه را پرتاب ميكند آنگاه B و سپس C و... .

(الف) در فضاي نمونه 1 به معناي اين است كه در پرتاب A شير ظاهر شده است و 01 به معناي اين است كه در پرتاب A خط و در پرتاب B شير ظاهر شده است و به همين ترتيب... .

(ب) i. $A = \{1,0001,0000001,\cdots\}$

ii. $B = \{01,00001,00000001,\cdots\}$

iii. A يا B برنده نشوند يعني اينكه C برنده شود:

$C = \{001,000001,000000001,\cdots\}$

5. سيستمي از 5 جزء تشكيل شده است كه اجزاء آن فعال يا خراب هستند. آزمايشي را در نظر بگيريد كه وضعيت هر جزء را مشاهده و نتيجه آزمايش را به صورت بردار $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ نشان مي‌دهد كه x_i برابر با 1 است اگر جزء i ام فعال و برابر صفر است اگر جزء i ام خراب باشد.

الف) چه تعداد نتيجه در فضاي نمونه اين آزمايش وجود دارد؟

ب) فرض كنيد كه سيستم زماني كار مي‌كند كه يا اجزاء 1و 2 هر دو فعال، يا اجزاء 3 و 4 هر دو فعال و يا اجزاء 1، 3 و 5 همگي فعال باشند. اگر W نشان دهنده پيشامد كاركردن سيستم باشد. اعضاء پيشامد W را مشخص نماييد.

ج) فرض كنيد A پيشامد خراب بودن اجزاء 4 و 5 باشد، چه تعداد عضو در پيشامد A وجود دارد؟

د) همه اعضاي پيشامد AW را بنويسيد.

(الف) 2^5=2*2*2*2*2=32

(ب) w = پیشامد کارکردن سیستم

$E=\{x_1=1,x_2=1\}, F=\{x_3=1,x_4=1\}, G=\{x_1=1,x_3=1,x_5=1\}$

$W=E\cup F\cup G$

(ج) A = پیشامد خراب بودن اجزاء 4 و 5 ؛ با توجه به اینکه اجزاء 1 و 2 و 3 هر کدام دو حالت دارند و اجزاء 4 و 5 تنها حالت خرابي را دارا مي‌باشند بنابراین 8=1*1*2*2*2

(د) AW={(1 ،1 ،1 ،0 ،0) و (0 ،1 ،1 ، 0 ،0 ،0)}

6. در یک بیمارستان بیماران را بر اساس وضعیت بیمه (اگر بیمار بیمه باشد کد 1 و اگر بیمه نباشد کد 0) و وضعیت جسمي (خوب (g)، متوسط (f) و وخیم (s)) پذیرش مي‌نمایند. آزمایشي را در نظر بگیرید که عبارتست از پذیرش یک بیمار.

الف) فضاي نمونه آزمایش را بنویسید.

ب) اگر پیشامد A بیان کننده بیمه بودن بیمار باشد، عضوهاي A را تعیین کنید.

ج) اگر پیشامد B بیان کننده بیمه نبودن بیمار باشد، عضوهاي B را تعیین کنید.

د) همه عضوهاي پیشامد $B^c\cup A$ را بنویسید.

(الف) $S=\{(0,f),(1,f),(0,g),(1,g),(0,s),(1,s)\}$

(ب) $A=\{(1,f),(1,g),(1,s)\}$

(ج) $B=\{(0,f),(0,g),(0,s)\}$

(د) با توجه به اینکه A و B مکمل یکدیگر هستند بنابراین $B^c=A$ مي‌باشد و در نتیجه

$B^c\cup A=A$

7. آزمایشي را در نظر بگیرید که بازیکنان یک تیم را بر اساس رنگ لباس (آبي یا سفید) و وابستگي حزبي آنها (جمهوریخواه، دمکرات و مستقل) تقسیم‌بندي مي‌نماید.اگر تیم داراي 15 بازیکن باشد چه تعداد نتیجه در هر یک از موارد زیر وجود دارد؟

الف) فضاي نمونه آزمایش.

ب) پیشامد اینکه حداقل یکي از اعضاي تیم آبي‌پوش باشد.

ج) پیشامد اینکه هیچ یک از اعضاي تیم خودش را مستقل به حساب نیاورد.

(الف) با توجه به اینکه براي هر بازیکن 6 حالت وجود دارد و با توجه به اصل ضرب فضاي نمونه داراي 6^{15} عضو است.

(ب) پیشامد اینکه هیچکدام از اعضاي تیم آبي پوش نیستند داراي 3^{15} عضو است بنابراین پیشامد اینکه حداقل یکي از اعضاي تیم آبي پوش باشد برابر با $6^{15}-3^{15}$ مي‌باشد.

(ج) پیشامد اینکه هیچکدام از اعضاي تیم مستقل نیستند داراي 4^{15} عضو است.

8. فرض کنید پیشامدهاي A و B ناسازگارند و P(A) = 0.3 و P(B) = 0.5 است. احتمال پیشامدهاي زیر را به دست آورید:

الف) A یا B اتفاق افتند.

ب) A اتفاق افتد اما B اتفاق نیفتد.

ج) A و B هر دو اتفاق افتند.

وقتي دو پیشامد A و B ناسازگار هستند آنگاه $P(A\cap B)=0$.

(الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.8$

(ب) $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)=0.3$

(ج) $P(A\cap B)=0$

9. یک مغازه خرده‌فروشي دو نوع کارت اعتباري A و B را مي‌پذیرد. 24 درصد از مشتریان کارت نوع A، 61 درصد کارت نوع B و 11 درصد هر دو نوع کارت را با خود دارند. چند درصد از مشتریان کارتي دارند که مورد قبول فروشگاه است؟

براي اینکه کارتي مورد قبول فروشگاه باشد باید یا از نوع A یا از نوع B باشد بنابراین باید احتمال اجتماع A و B را بدست آوریم که با توجه به اصل جمع احتمالات داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{74}{100}$$

10. 60 درصد از دانش‌آموزان یک مدرسه دخترانه انگشتر و گردنبند ندارند. 20 درصد انگشتر و 30 درصد گردنبند دارند. اگر یک دانش‌آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه این دانش‌آموز

الف) انگشتر یا گردنبند داشته باشد چقدر است؟

ب) انگشتر و گردنبند داشته باشد چقدر است؟

A: پیشامد اینکه گردنبند ندارد و B: پیشامد اینکه انگشتر ندارد.

$$P(A\cap B)=0.6, P(A)=0.7, P(B)=0.8, P(A^c)=0.3, P(B^c)=0.2$$

(الف)

$$P(A^c\cup B^c)=P(A\cap B)^c=1-P(A\cap B)=0.4$$

(ب)

$$P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.9$$

$$P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)=0.1$$

11. 28 درصد از مردان آمریکایي سیگار، 7 درصد سیگار برگ و 5 درصد هم سیگار و هم سیگار برگ مي‌کشند.

الف) چند درصد از مردان آمریکایي سیگار و سیگار برگ نمي‌کشند؟

ب) چند درصد سیگار برگ مي‌کشند ولي سیگار نمي‌کشند؟

A= پیشامد اینکه سیگار مي‌کشند و B= پیشامد اینکه سیگار برگ مي‌کشند.

(الف)

$$P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3$$

$$P(A^c\cap B^c)=1-0.3=0.7$$

(ب)

$$P(B\cap A^c)=P(B)-P(A\cap B)=0.07-0.05=0.02$$

12. در یک مدرسه 3 کلاس زبان اسپانیایي، فرانسوي و آلماني وجود دارد و هر یک از 100 دانش‌آموز مدرسه مي‌توانند در هر یک از این کلاسها ثبت‌نام کنند. اگر 28 نفر در کلاس اسپانیایي، 26 نفر در کلاس فرانسه و 16 نفر در کلاس آلماني ثبت‌نام کنند، همچنین 12 نفر در دو کلاس اسپانیایي و فرانسوي، 4 نفر در دو کلاس اسپانیایي و آلماني، 6 نفر در دو کلاس فرانسوي و آلماني و 2 نفر در هر سه کلاس ثبت‌نام کنند،

الف) اگر دانش‌آموزي را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالي او در هیچ کلاسي ثبت‌نام نکرده است؟

ب) اگر دانش‌آموزي به تصادف انتخاب شود، با چه احتمالي او دقیقاً در یک کلاس ثبت‌نام کرده است؟

ج) اگر 2 دانش‌آموز به تصادف انتخاب شوند، با چه احتمالي حداقل یکي از آنها در یک کلاس ثبت‌نام کرده است؟

S: پیشامد اینکه در کلاس اسپانیایي ثبت‌نام کرده است، F: پیشامد اینکه در کلاس فرانسوي ثبت‌نام کرده است و G: پیشامد اینکه در کلاس آلماني ثبت‌نام کرده است.

$$P(S)=0.28, P(F)=0.26, P(G)=0.16, P(S\cap F)=0.12$$

$$P(S\cap G)=0.04, P(F\cap G)=0.06, P(F\cap G\cap S)=0.02$$

(الف) ابتدا احتمال اینکه حداقل در یک کلاس ثبت‌نام کرده است را بدست مي‌آوریم و سپس متمم آن یعني احتمالي اینکه در هیچ کلاسي ثبت‌نام نکرده را محاسبه مي‌کنیم

$$P(S\cup F\cup G)=P(S)+P(F)+P(G)-P(S\cap F)-P(S\cap G)-$$
$$-P(F\cap G)+P(S\cap F\cap G)=0.5$$

$$P(S\cup F\cup G)^c=1-0.5=0.5$$

(ب) ابتدا احتمال فقط S، F و G را بدست مي‌آوریم:

$$P(S\cap F^c\cap G^c)=P(S)-P(S\cap F)-P(S\cap G)+P(S\cap F\cap G)=0.14$$

$$P(S^c\cap F\cap G^c)=P(F)-P(S\cap F)-P(F\cap G)+P(S\cap F\cap G)=0.10$$

$$P(S^c\cap F^c\cap G)=P(G)-P(S\cap G)-P(F\cap G)+P(S\cap F\cap G)=0.08$$

و با جمع احتمالهاي فوق احتمال اینکه دانش‌آموز دقیقاً در یک کلاس ثبت‌نام کند برابر با 0.32 بدست مي‌آید.

(ج) با توجه به قسمت (الف) مي‌دانیم 50 نفر در هیچ کلاسي ثبت‌نام نکرده‌اند بنابراین احتمال اینکه حداقل یکي از دو دانش‌آموز در یک کلاس ثبت‌نام کرده برابر است با احتمال اینکه یکي از آنها ثبت‌نام کرده ای اینکه هر دو ثبت‌نام کرده‌اند.

$$\frac{\binom{50}{1}\binom{50}{1}}{\binom{100}{2}}+\frac{\binom{50}{2}\binom{50}{0}}{\binom{100}{2}}=\frac{149}{198}$$

13. در شهري با جمعيت 100000 نفر سه روزنامه I، II و III منتشر مي‌شود، نسبت كساني كه اين روزنامه‌ها را مطالعه مي‌كنند به صورت زير داده شده است:

I : 10درصد — I و II : 8 درصد — I و II و III: 1 درصد

II : 30درصد — I و III : 2درصد

III : 5 درصد — II و III : 4 درصد

الف) تعداد افرادي كه فقط يک روزنامه را مطالعه مي‌كنند چقدر است؟

ب) چه تعدادي حداقل 2 روزنامه را مطالعه مي‌كنند؟

ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد. چند نفر حداقل يک روزنامه صبح به علاوه يک روزنامه عصر را مطالعه مي‌كنند؟

د) چند نفر هيچ روزنامه‌اي مطالعه نمي‌كنند؟

ه) چند نفر فقط يک روزنامه صبح و يک روزنامه عصر را مطالعه مي‌كنند؟

(الف) ابتدا احتمال فقط I، II و III را بدست مي‌آوريم:

$$P(I\cap II^c\cap III^c)=P(I)-P(I\cap II)-P(I\cap III)+P(I\cap II\cap III)=0.01$$

$$P(I^c\cap II\cap III^c)=P(II)-P(I\cap II)-P(II\cap III)+P(I\cap II\cap III)=0.19$$

$$P(I^c\cap II^c\cap III)=P(III)-P(I\cap III)-P(II\cap III)+P(I\cap II\cap III)=0$$

و با جمع احتمالهاي فوق احتمال اينكه شخصي فقط يک روزنامه را مطالعه كند برابر با 0.20 بدست مي‌آيد كه با ضرب مقدار فوق در كل جمعيت يعني 100000 نفر تعداد افرادي كه فقط يک روزنامه را مطالعه ميكنند برابر با 20000 نفر به دست مي‌آيد.

(ب) ابتدا احتمال حداقل يک روزنامه را به دست مي‌آوريم:

$P(I\cup II\cup III)=0.32$

حال با توجه به اينكه تعداد افرادي كه حداقل دو روزنامه را مطالعه مي‌كنند برابر است با تعداد افرادي كه حداقل يک روزنامه را مطالعه مي‌كنند منهاي تعداد افرادي كه فقط يک روزنامه را مطالعه مي‌كنند بنابراين ابتدا احتمال مربوطه را به دست مي‌آوريم كه برابر است با 0.12 = 0.2- 0.32 و در نتيجه تعداد افرادي كه حداقل 2 روزنامه را مطالعه مي-كنند برابر با 12000 نفر مي‌باشد.

(ج) $$P((I\cup III)\cap II)=P((I\cap II)\cup(III\cap II))=0.04+0.08-0.01=0.11$$

بنابراين 11000 نفر حداقل يک روزنامه صبح به علاوه يک روزنامه عصر را مطالعه مي‌كنند.

(د) $P(I^c\cap II^c\cap III^c)=1-P(I\cup II\cup III)=0.68$ بنابراين 68000 نفر هيچ روزنامه‌اي مطالعه نمي-كنند.

(ه)

$$\begin{aligned}&P(I\cap III^c\cap II)+P(I^c\cap III\cap II)=\\&=P(I\cap II)-P(I\cap II\cap III)+P(II\cap III)-P(I\cap II\cap III)=\\&=0.10\end{aligned}$$

بنابراين 10000 نفر فقط يک روزنامه صبح و يک روزنامه عصر را مطالعه مي‌كنند.

14. اطلاعات زير در رابطه با شغل، وضعيت تأهل و تحصيلات 1000 نفر مشترک يک مجله داده شده است: 312 نفر شاغل، 470 نفر متأهل، 525 نفر دانشجو، 42 نفر دانشجوي شاغل، 147 نفر دانشجوي متأهل، 86 نفر متأهل شاغل و 25 نفر دانشجوي شاغل و متأهل هستند. نشان دهيد كه اعداد گزارش شده غلط است.

با توجه به اينكه $P(A\cup B\cup C)=1.057$ و احتمال هرگز بزرگتر از 1 نمي‌شود بنابراين اعداد گزارش شده غلط است.

15. *

16 . *

17. اگر 8 مهره رخ شطرنج را به تصادف روي صفحه شطرنج قرار دهيم احتمال اينكه هيچ يک از آنها ديگري را نزند يعني اينكه هيچ سطر و يا ستوني بيش از يک رخ نداشته باشد را به دست آوريد.

تعداد حالتهاي ممكن براي قرار گرفتن 8 مهره به صورت

57*58*59*60*61*62*63*64 و تعداد حالتهايي كه مهره‌ها همديگر را نزنند به صورت 4*9*16*25*36*49*64 مي‌باشد و در نتيجه احتمال اينكه هيچ يک از آنها ديگري را نزنند برابر با 9.10947×10^{-6} است.

18 . *

19 . دو تاس متقارن را كه دو وجه آنها قرمز، دو وجه آنها سياه، يک وجه آنها زرد و وجه ديگر آنها سفيد است پرتاب مي‌كنيم. احتمال اينكه نتيجه پرتاب آنها وجه هم رنگ باشد را به دست آوريد.

با توجه به اينكه نتيجه پرتاب تاسها از همديگر مستقل است بنابراين احتمال اشتراک آنها برابر با حاصلضرب آنها مي‌باشد و در نتيجه $\frac{4}{36}$ = (هر دو قرمز باشد)P، $\frac{4}{36}$ = (هر دو سياه باشد)P، $\frac{1}{36}$ = (هر دو زرد باشد)P و $\frac{1}{36}$ = (هر دوسفيد باشد)P و بنابراين احتمال اينكه نتيجه پرتاب آنها وجه هم رنگ باشد برابر با $\frac{10}{36}$ است.

20 . *

21. يک سازمان كوچک محلي از 20 خانواده تشكيل شده است كه 4 خانواده آنها يک فرزند، 8 خانواده 2 فرزند، 5 خانواده 3 فرزند، 2 خانواده 4 فرزند و يک خانواده 5 فرزند دارند.

الف) اگر يكي از اين خانواده‌ها را به تصادف انتخاب كنيم احتمال اينكه اين خانواده i فرزند داشته باشد چقدر است؟(5 و 4 و 3 و 2 و 1 = i)

ب) اگر يكي از بچه‌ها را به تصادف انتخاب كنيم احتمال اينكه اين بچه از خانوادهاي با i فرزند باشد چقدر است؟ (5 و 4 و 3 و 2 و 1 = i)

(الف) با توجه به اينكه تنها 4 خانواده از اين 20 خانواده داراي تک فرزند هستند بنابراين

$\frac{4}{20} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{20}{1}} =$(يک فرزند) P و به همين ترتيب مي‌توانيم توزيع احتمال زير را ارايه كنيم.

X	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

(ب) ابتدا لازم است كه تعداد بچه‌ها را به دست آوريم كه برابر با 48 مي‌باشد حال با توجه به اينكه تنها 4 بچه از اين 48 بچه از خانواده‌هاي تک فرزندي هستند بنابراين احتمال اينكه بچه از خانواده‌هاي تک فرزندي باشد برابر با $\frac{4}{48} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{48}{1}}$ مي‌باشد و به همين ترتيب مي‌توانيم توزيع احتمال زير را ارايه كنيم.

X	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{4}{48}$	$\frac{16}{48}$	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{48}$	$\frac{5}{48}$

22. *

23. يک جفت تاس منظم را پرتاب مي‌كنيم. احتمال اينكه نتيجه عدد حاصل شده در تاس دوم بيشتر از نتيجه حاصل شده در تاس اول باشد چقدر است؟

اگر تاس اول عدد 1 باشد براي تاس دوم 5 حالت وجود دارد و به همين ترتيب احتمال مربوطه برابر با $\frac{5}{12} = \frac{5+4+3+2+1+0}{36}$ است.

24. اگر دو تاس را پرتاب كنيم، احتمال اينكه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر با i باشد را به دست آوريد. مقدار آن را براي 12 و 11 و ... و 3و 2 = i پيدا كنيد.

اگر X را برابر با مجموع دو عدد ظاهر شده در نظر بگيريم آنگاه احتمالات خواسته شده را ميتوان با جدول زير نمايش داد.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

25. یک زوج تاس را پرتاب ميكنيم تا جمع 5 يا 7 ظاهر شود. احتمال اينكه جمع 5 ابتدا ظاهر شود را به دست آوريد.

راهنمايي: اگر E_n نشان دهنده پيشامد ظاهر شدن 5 در n امين پرتاب و ظاهر نشدن 5 يا 7 در (n-1) پرتاب اول باشد. $P(E_n)$ را محاسبه كنيد و بررسي نماييد كه $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ احتمال مورد نظر است.

براي اينكه مجموع 5 ابتدا ظاهر شود بايد در پرتاب اول ظاهر شود يا در پرتاب دوم ظاهر شود و در پرتاب اول مجموع 5 يا 7 ظاهر نشود و به همين ترتيب تا ... بنابراين پيشامد E_n را پيشامد ظاهر شدن 5 در n امين پرتاب و ظاهر نشدن 5 يا 7 در (n-1) پرتاب اول تعريف ميكنيم. A : پيشامد اينكه مجموع 5 ظاهر شود و B: پيشامد اينكه مجموع 5 يا 7 ظاهر نشود.و برای برنده شدن باید اجتماع E_n ها را به دست آوریم كه با توجه به استقلال آنها نتيجه به صورت زیر حاصل میشود.

$$P(A)=\frac{4}{36}$$

$$P(B)=1-P(B^c)=1-\frac{10}{36}=\frac{26}{36}$$

$$P(E_n)=P(A)[P(B)]^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{36}(\frac{26}{36})^{n-1}=\frac{4}{10}$$

26. *

27 . ظرفي شامل 3 توپ قرمز و 7 توپ سياه است. بازيكنهاي A و B يكي پس از ديگري توپها را از ظرف خارج ميكنند تا يک توپ قرمز انتخاب شود. احتمال اينكه بازيكن A توپ قرمز را انتخاب كند به دست آوريد. (ابتدا بازيكن A، توپ از ظرف انتخاب ميكند و سپس بازيكن B و به همين ترتيب بازي ادامه مييابد، در ضمن توپهاي انتخاب شده به ظرف بازگردانده نميشوند.)

بازيكن A در مرحله اول توپ قرمز را انتخاب ميكند يا در مرحله اول توپ سياه و بازيكن B نيز توپ سياه و در مرحله دوم توپ قرمز را انتخاب ميكند و به همين ترتيب در مرحله سوم يا چهارم توپ قرمز را انتخاب ميكند. بنابراين

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=0.58$$

28. ظرفي شامل 5 توپ قرمز، 6 توپ آبي و 8 توپ سبز است. اگر یک مجموعه 3 تايي از توپها به تصادف انتخاب شود، احتمال پيشامدهاي زير را به دست آوريد:

الف) توپها از یک رنگ باشند.

ب) توپها از رنگهاي متفاوت باشند.

(الف) براي اينكه توپها از یک رنگ باشند بايد يا هر 3 قرمز(A) يا سبز (B) يا آبي (C) باشند.

$$P(A)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{19}{3}}=\frac{10}{969},P(B)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{19}{3}}=\frac{20}{969},P(C)=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{19}{3}}=\frac{56}{969},P(A\cup B\cup C)=\frac{86}{969}=0.0888$$

(ب) D: پيشامد اينكه توپها از رنگهاي متفاوت باشند.

$$P(D)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}}=\frac{80}{323}=0.2477$$

مسأله را در صورتي كه رنگ توپ انتخاب شده را يادداشت نموده و قبل از انتخاب توپ دوم در ظرف بازگردانده شود حل كنيد. اين نوع انتخاب را نمونهگيري با جايگذاري گويند.

(الف)

$$P(A)=\frac{5}{19}\times\frac{5}{19}\times\frac{5}{19}=0.01822, P(B)=(\frac{6}{19})^3=0.03149$$

$$P(C)=(\frac{8}{19})^3=0.07465, P(A\cup B\cup C)=0.1243$$

(ب) با توجه به اینکه ترتیب انتخاب مهم است و براي جایگشت 3 رنگ !3 حالت وجود دارد و هر حالت داراي احتمال برابر ميباشد در نتیجه احتمال مورد نظر به صورت زیر به دست ميآید.

$$P(D)=3!\times\frac{5}{19}\times\frac{6}{19}\times\frac{8}{19}=0.2099$$

29. در ظرفي n توپ سفید و m توپ سیاه وجود دارد.
الف) اگر 2 توپ را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آنها یکسان باشد چقدر است؟
ب) اگر 1 توپ را به تصادف انتخاب نموده و قبل از انتخاب دومین توپ آن را جایگزین نماییم، احتمال اینکه توپهاي انتخاب شده همرنگ باشند را بدست آورید.
(الف) یا هر دو سفید یا هر دو سیاه هستند:

$$\frac{\binom{n}{2}\binom{m}{0}}{\binom{n+m}{2}}+\frac{\binom{n}{0}\binom{m}{2}}{\binom{n+m}{2}}$$

(ب)

$$(\frac{n}{n+m})^2+(\frac{m}{n+m})^2$$

30. تیمهاي شطرنج دو مدرسه به ترتیب از 8 و 9 بازیکن تشکیل شدهاند. 4 بازیکن از هر تیم به تصادف انتخاب ميکنیم تا در یک مسابقه شرکت نمایند. افراد انتخاب شده از دو تیم را به تصادف به جفتهایي تقسیم نموده تا با یکدیگر مسابقه دهند. اگر علي در تیم شطرنج یک مدرسه و برادرش محمد در تیم شطرنج مدرسه دیگر عضو باشند. احتمال پیشامدهاي زیر را محاسبه نمایید:
الف) علي و محمد با یکدیگر مسابقه دهند.
ب) علي و محمد به عنوان نماینده مدارس خود انتخاب شوند ولي با یکدیگر بازي نکنند.
ج) دقیقاً یکي از دو برادر به عنوان نماینده مدرسه خود انتخاب شوند.

(الف) احتمال اینکه علي جزء تیم انتخابي باشد برابر با $\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}}=\frac{1}{2}$ و احتمال اینکه محمد جزء تیم انتخابي باشد برابر با $\frac{\binom{1}{1}\binom{8}{3}}{\binom{9}{4}}=\frac{4}{9}$ است. حال با توجه به اینکه علي و محمد باید روبروي یکدیگر قرار بگیرند بنابراین باید در یک جفت قرار بگیرند براي بدست آوردن این احتمال ابتدا چهار بازیکن از یک تیم را در نظر ميگیریم و به تصادف به هر کدام یک نفر از تیم مقابل اختصاص ميدهیم بنابراین احتمال اینکه در روبروي علي، محمد قرار بگیرد برابر با $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$ ميشود.

(ب) با توجه به قسمت (الف) احتمال اینکه علي و محمد روبروي هم قرار نگیرند برابر با $\frac{3}{4}$ است و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{3}{18}$ ميشود.

(ج) براي اينكه دقيقاً يكي از دو برادر انتخاب شود دو حالت وجود دارد (1) علي انتخاب ولي محمد انتخاب نشود

که احتمال آن برابر با $\frac{5}{18}=\frac{\binom{1}{0}\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}}\times\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}}$ ميشود (2) محمد انتخاب ولي علي انتخاب نشود كه احتمال آن برابر

با $\frac{4}{18}=\frac{\binom{1}{1}\binom{8}{3}}{\binom{9}{4}}\times\frac{\binom{1}{0}\binom{7}{4}}{\binom{8}{4}}$ ميشود و در نتيجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{1}{2}=\frac{5}{18}+\frac{4}{18}$ است.

31. یک تیم بسکتبال سه نفره شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است.

الف) اگر از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک فرد به تصادف انتخاب شود. احتمال اینکه یک تیم کامل انتخاب شود را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه هر سه نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند را به دست آورید.

(الف) براي اينكه يک تيم كامل انتخاب شود بايد از هر موقعيت يک بازيكن انتخاب كنيم بنابراين در انتخاب از تيم اول هيچ محدوديتي وجود ندارد وبنابراين 3 حق انتخاب داريم و براي تيم دوم با توجه به اينكه بازيكن يک موقعيت را از تيم اول انتخاب كردهايم بنابراين 2 حق انتخاب داريم و براي تيم سوم 1 حق انتخاب داريم و در تيجه احتمال مربوطه برابر با $\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{3}$ است.

(ب) براي اينكه هر سه نفر انتخاب شده بازيكن يک موقعيت باشند در انتخاب از تيم اول هيچ محدوديتي وجود ندارد ولي براي تيم دوم و سوم دقيقاً بايد همان موقعيت را انتخاب كنيم پس 1 حق انتخاب وجود دارد بنابراين احتمال مربوطه برابر با $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}$ است.

32. یک گروه از افراد شامل b پسر و g دختر به تصادف در یک خط ردیف میشوند. بدین ترتیب هر یک از (b + g)! جایگشت افراد هم شانس هستند. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت i ام $(1\le i\le b+g)$ دختر باشد را به دست آورید.

ابتدا باید برای موقعیت i انیک دخــــتر را از می ام g دختر انتخاب کنیم $\binom{g}{1}=g$ سپس لازم است که در $(g+b-1)$ محل باقی مانده افراد قرار بگیرند که به $(g+b-1)!$ طریق امکان پذیر است بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{(g+b-1)!}{(g+b)!}$ است.

33. در جنگلي 20 گوزن وجود دارد كه 5 تاي آنها را پس از به دام انداختن علامتگذاري و رها كردهاند. مدتي بعد 4 گوزن را مجدداً به دام مياندازند. احتمال اينكه 2 تا از 4 گوزن به دام افتاده داراي علامت باشند را به دست آوريد. چه فرضي را در نظر ميگيريد؟

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}=0.2167$$

فرض ميكنيم كه تعداد گوزنها و گوزنهاي علامتگذاري شده تغيير نكرده است.

34. *

35. تعداد 30 نفر روانپزشک و 24 نفر روانشناس در یک کنفرانس شرکت کردهاند. 3 نفر از آنها را براي حضور در یک میزگرد به تصادف انتخاب میکنیم. احتمال اینکه حداقل یک روانپزشک انتخاب شود چقدر است؟

براي حساب كردن اين احتمال دو راه حل وجود دارد يكي مستقيم و يكي با استفاده از قانون متممگيري، براي استفاده از قانون متممگيري احتمال اينكه هيچ روانپزشكي انتخاب نشود(A) را بدست ميآوريم:

$$P(A)=\frac{\binom{24}{3}\binom{30}{0}}{\binom{54}{3}}=0.08816$$

و در نتیجه احتمال اینکه حداقل یک روانپزشک انتخاب شود برابر با $1 - 0.08816 = 0.9184$ است. اگر مي-خواستیم حداقل یک روانشناس انتخاب شود این احتمال برابر با 0.8363 مي‌شد.

36. *

37. معلمي به دانش‌آموزانش یک مجموعه 10 سؤالي داده و به آنها اطلاع میدهد که امتحان نهایي شامل 5 سؤال تصادفي از سؤالات مجموعه است. اگر دانش‌آموزي توانسته باشد 7 سؤال از مجموعه 10 سؤال داده شده را پاسخ دهد، مطلوب است احتمال اینکه

الف) در امتحان نهایي به هر 5 سؤال امتحاني پاسخ صحیح بدهد؟

ب) حداقل به 4 سؤال امتحاني پاسخ صحیح بدهد؟

(الف) براي اینکه دانش‌آموز بتواند به هر 5 سؤال امتحاني پاسخ صحیح بدهد باید 5 سوال از بین 7 سؤالي که دانش-آموز به آنها جواب داده است انتخاب شده باشد بنابراین احتمال مربوطه برابر با $\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.0833$ است.

(ب) A : پیشامد اینکه به 4 سوال پاسخ صحیح بدهد و B: پیشامد اینکه به 5 سوال پاسخ صحیح بدهد در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.5$$

است.

38. n جوراب داریم که 3 تاي آنها قرمز است. اگر احتمال انتخاب 2 جوراب قرمز به تصادف برابر با 0.5 باشد، مقدار n را به دست آورید.

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 12 = 0$$

و با حل معادله بالا $n = 4$ یا $n = -3$ بدست مي‌آید که $n = 4$ قابل قبول است.

39. در شهري 5 هتل وجود دارد. اگر در یک روز 3 نفر در هتلهاي شهر ساکن شده باشند. احتمال اینکه هر یک در هتلي جداگانه مستقر باشند را به دست آورید. چه فرضهاي را براي حل مسأله در نظر مي‌گیرید؟

چون هر شخص باید در یک هتل اسکان گزیند بنابراین نفر اول 5 حالت انتخاب و نفر دوم 4 حالت و نفر سوم 3 حالت براي انتخاب دارد($5 * 4 * 3 = 60$). در حالت معمولي (به شرط اینکه هر هتل توان پذیرش هر سه نفر را داشته باشد) تعداد حالات ممکن برابر با $5 * 5 * 5 = 125$ است و بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{60}{125} = 0.48$ است.

40.*

41. اگر تاسي را 4 مرتبه پرتاب کنیم، احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد 6 ظاهر شود چقدر است؟

اگر تاسي را چهار مرتبه پرتاب کنیم تعداد حالتهاي ممکن برابر با 6^4 است. براي حساب کردن این احتمال دو راه حل وجود دارد یکي مستقیم و یکي با استفاده از قانون متمم‌گیري، براي استفاده از قانون متمم‌گیري احتمال اینکه اصلاً عدد 6 ظاهر نشود (A) را بدست مي‌آوریم

$$P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$$

و در نتیجه احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد 6 ظاهر شود برابر با 0.5177 مي‌باشد.

42. دو تاس را n مرتبه به طور متوالي پرتاب مي‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک مرتبه جفت 6 ظاهر شود را به دست آورید. n چقدر بزرگ باشد تا احتمال فوق حداقل برابر با 0.5 گردد؟

با توجه به اینکه حداقل یک مرتبه جفت 6 ظاهر شود مکمل اصلاً 6 ظاهر نشود(A) مي‌باشد بنابراین

$P(A) = (\frac{5}{6})^n$

$P(A^c) = 1 - (\frac{5}{6})^n$

$1 - (\frac{5}{6})^n \geq \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; (\frac{5}{6})^n \leq \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \; n = 4$

43. الف) اگر N نفر شامل افراد A و B به تصادف در یک ردیف قرار گیرند. احتمال اینکه A و B پهلوي هم باشند چقدر است؟

ب) احتمال پیشامد فوق، وقتي که افراد به تصادف روي محیط یک دایره قرار گیرند را به دست آورید.

(الف) تعداد حالات قرار گرفتن N فرد برابر با !N است. حال اگر بخواهیم A و B کنار هم باشند مانند سؤالات قبلي آنها را به عنوان یک نفر در نظر ميگیریم و تعداد حالات مختلف برابر با $2!(N-1)!$ است و در نتیجه احتمال مربوطه برابر با $\frac{2!(N-1)!}{N!}$ است.

(ب) تعداد حالات قرار گرفتن N فرد اطراف محیط یک دایره برابر با !(N-1) است. حال اگر بخواهیم A و B کنار هم باشند مانند قسمت قبلي آنها را به عنوان یک نفر در نظر ميگیریم و تعداد حالات مختلف برابر با $2!(N-2)!$ است و در نتیجه احتمال مربوطه برابر با $\frac{2!(N-2)!}{(N-1)!}$ است.

44. 5 نفر که به وسیله حروف A، B، C، D و E نشان داده شدهاند در یک ردیف قرار ميگیرند. فرض کنید که هر ترتیب ممکن از قرار گرفتن آنها هم شانس باشد. احتمال پیشامدهاي زیر را به دست آورید:

الف) دقیقاً یک نفر بین A و B باشد.

ب) دقیقاً دو نفر بین A و B باشند.

ج) سه نفر بین A و B باشند.

ميدانیم تعداد حالتهاي ممکن برابر با 120=!5 ميباشد.

(الف) زماني که بخواهیم دقیقاً یک نفر بین A و B قرار بگیرد باید آنرا از بین سه نفر انتخاب کنیم که این به $\binom{3}{1} = 3$ طریق امکان پذیر است حال با توجه به اینکه A و B نیز خود !2 جایگشت دارند و با احتساب A و B و فرد میاني به عنوان یک نفر و دو نفر دیگر !3 جایگشت در حالت کلي به وجود ميآید در نتیجه تعداد حالات ممکن برابر با $3 \times 2! \times 3! = 36$ ميباشد بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{36}{120} = 0.3$ است.

(ب) زماني که بخواهیم دقیقاً دو نفر بین A و B قرار بگیرد باید آن دو را از بین سه نفر انتخاب کنیم که این به $\binom{3}{2} = 3$ طریق امکان پذیر است حال با توجه به اینکه A و B نیز خود !2 جایگشت دارند همچنین آن دو نفر میاني نیز !2 جایگشت دارند و با احتساب A و B و دو فرد میاني به عنوان یک نفر و نفر پنجم،!2 جایگشت در حالت کلي به وجود ميآید بنابراین تعداد حالات ممکن برابر با $3 \times 2! \times 2! \times 2! = 24$ ميباشد و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{24}{120} = 0.2$ است.

(ج) براي اینکه سه نفر بین A و B قرار گیرند تنها 1 حالت انتخاب وجود دارد ($\binom{3}{3} = 1$) و با توجه به اینکه A و B خود !2 جایگشت دارند و آن سه نفر نیز !3 جایگشت دارند در نتیجه $3! \times 2! = 12$ حالت ممکن وجود دارد و بنابراین احتمال مربوطه برابر با $\frac{12}{120} = 0.1$ است.

45. خانمي n کلید دارد که یکي از آنها درب منزلش را باز ميکند.

الف) اگر او کلیدها را به تصادف انتخاب کرده و آنهایي که درب را باز نميکنند کنار گذارد با چه احتمالي او در k امین تلاش درب را باز ميکند؟

ب) اگر او کلیدهاي قبلي را کنار نگذارد احتمال پیشامد فوق چقدر است؟

(الف) احتمال اینکه در اولین تلاش به نتیجه برسد برابر با $\frac{1}{n}$ است، احتمال اینکه در دومین تلاش به نتیجه برسد برابر با $\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ است و به همین ترتیب احتمال پیروزي در k امین مرحله برابر با $\frac{1}{n}$ است.

(ب) احتمال اینکه در اولین تلاش به نتیجه برسد برابر با $\frac{1}{n}$ است، احتمال اینکه در دومین تلاش به نتیجه برسد برابر با $\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{(n-1)^1}{n^2}$ است، احتمال پیروزي در بار سوم برابر با $\frac{n-1}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{(n-1)^2}{n^3}$ و به همین ترتیب احتمال پیروزي در k امین مرحله برابر با $\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$ است.

46. چند نفر باید در یک اطاق حضور داشته باشند تا احتمال اینکه حداقل دو نفر از آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند بیش از 0.5 باشد؟ فرض کنید تولد در ماههاي مختلف هم شانس است.

احتمال اینکه در بین n نفر هیچکدام در یک ماه متولد نشوند برابر با $P(A)=\frac{12\times11\times\ldots\times(12-n+1)}{12^n}$ میباشد و در نتیجه احتمال اینکه حداقل دو نفر از آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند برابر با $1-P(A)$ است حال قصد داریم n-ي را بیابیم که براي آن $1-P(A)>0.5$ باشد. با حل عددي $n=5$ به دست میآید.

47. اگر در اطاقي 12 نفر باشند، احتمال اینکه هیچ دوتایي از آنها در یک ماه متولد نشده باشند چقدر است؟

کل حالات ممکن برابر با 12^{12} است و براي اینکه هیچ دو فردي در یک ماه متولد نشده باشند فرد اول حق 12 انتخاب دارد، فرد دوم حق 11 و به همین ترتیب حالتهاي ممکن برابر با 1 * 2* 3* 4 * 5 * 6* 7 * 8* 9* 10* 11* 12 میباشد و بنابراین احتمال مورد نظر برابر با 5.3723×10^{-5} است.

48. 20 نفر را در نظر بگیرید، احتمال اینکه در 12 ماه سال، 4 ماه هر کدام 2 تولد و 4 ماه هر کدام 3 تولد داشته باشند را به دست آورید.

ابتدا باید 4 ماه از میان 12 ماه انتخاب کرده و برای هر ماه 2 نفر انتخاب کـمیکن سپس از بین 8 ماه باقی مانده 4 ماه انتخاب کرده و برای هر ماه 3نفر انتخاب کنیم بنابراین احتمال مربوطه به صورت زیر به دست میآید.

$$\frac{\binom{12}{4}\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2}\binom{14}{2}\binom{8}{4}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{12^{20}}=0.0010604$$

49. یک گروه متشکل از 6 مرد و 6 زن را به تصادف به دو گروه 6 نفره تقسیم میکنیم احتمال اینکه هر دو گروه تعداد مساوي مرد داشته باشند را به دست آورید.

براي اینکه هر دو گروه به تعداد مساوي مرد داشته باشند باید به هر گروه 3 مرد و 3 زن تعلق بگیرد بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}{\binom{12}{6}}=0.4329$ است.

*.50

51. فرض کنید n توپ را به تصادف در N ظرف توزیع کنیم. احتمال اینکه m توپ در ظرف اول باشد را به دست آورید. فرض کنید که همه N^n ترتیب توزیع توپها هم شانس باشند.

$$\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

52. در کمدي 10 جفت کفش نگهداري میشود. اگر 8 کفش به تصادف انتخاب شود، احتمال پیشامدهاي زیر را به دست آورید:

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود.

ب) درست یک جفت کفش انتخاب شود.

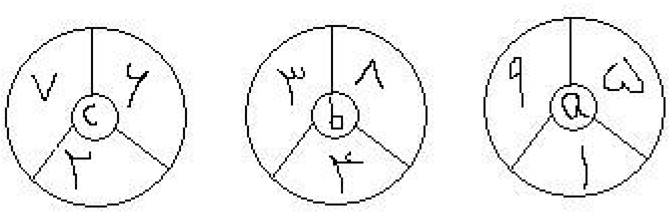
(الف) براي اینکه هیچ جفت کفشي انتخاب نشود باید هر لنگه کفش را از یک جفت متفاوت انتخاب کنیم بنابراین باید از بین 10 جفت کفش 8 جفت را انتخاب و از هرکدام یک لنگه را برداریم در نتیجه براي انتخاب 8 جفت کفش از بین 10 جفت کفش $\binom{10}{8}$ طریق و انتخاب هر لنگه از یک جفت برابر با $\binom{2}{1}=2$ میباشد که این عمل 8 بار اتفاق میافتد در

نتیجه 2^8 انتخاب نیز در این حالت داریم لذا $\binom{10}{8}2^8$ روش انتخاب در حالت كلي وجود دارد و بنابراین احتمال مورد نظر برابر با $\frac{2^8\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}} = 0.09145$ است.

(ب) براي اینكه دقیقاً یک جفت كفش انتخاب شود $\binom{10}{1}$ حالت انتخاب وجود دارد و حال 9 جفت كفش باقي ميماند و ميخواهیم 6 لنگه كفش از آنها انتخاب كنیم مانند حالت (الف) براي این عمل $2^6\binom{9}{6}$ طریق وجود دارد و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر با $\frac{\binom{10}{1}2^6\binom{9}{6}}{\binom{20}{8}} = 0.4268$ است.

.53 *
.54 *
.55 *

.56 دو بازیكن در یک بازي به صورت زیر شركت ميكنند. بازیكن A یكي از سه گردونه زیر را انتخاب و سپس بازیكن B یكي از دو گردونه باقي مانده را انتخاب مينماید. هر دو بازیكن گردونههاها را به چرخش در آورده و گردونهاي كه با عدد بزرگتر متوقف ميشود برنده اعلام ميگردد. فرض كنید هر گردونه با شانس برابر در یكي از نواحي متوقف شود. در این صورت آیا شما ترجیح ميدهید بازیكن A باشید یا بازیكن B ؟ پاسخ خود را شرح دهید !



اگر A گوی a و B گوی b را انتخاب کند آنگاه احتمال پیروزی A به صورت زیر حاصل میشود.

$$P(A) = P(A|9)P(9) + P(A|5)P(5) + P(A|1)P(1)$$
$$= 1\times\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$
$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{9}$$

اگر A گوی a و B گوی c را انتخاب کند آنگاه احتمال پیروزی A به صورت زیر حاصل میشود.

$$P(A) = P(A|9)P(9) + P(A|5)P(5) + P(A|1)P(1)$$
$$= 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$
$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{9}$$

اگر A گوی b و B گوی c را انتخاب کند آنگاه احتمال پیروزی A به صورت زیر حاصل میشود.

$$P(A) = P(A|8)P(8) + P(A|3)P(3) + P(A|4)P(4)$$
$$= 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$
$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{4}{9}$$

بقیه حالات با تغیر نام A و B به دست می‌آید. حال اگربازیکن اول گوی a را انتخاب کند بازیکن دوم با انتخاب c شانس بی‌شتری برای پیروزی دارد. حال اگربازیکن اول گوی b را انتخاب کند بازیکن دوم با انتخاب a شانس بی‌شتری برای پیروزی دارد. حال اگربازیکن اول گوی c را انتخاب کند بازیکن دوم با انتخاب b شانس بی‌شتری برای پیروزی دارد.

لذا بازیکن B را ترجیح می‌ده ی‌م.