

1

آنالیز ترکیباتی

1. الف) چند پلاک نمره 7 رقمی خودرو می‌توان تهیه نمود وقتی که دو رقم اول آن از حروف لاتین و 5 رقم باقیمانده از اعداد باشد.

با توجه به وجود 26 حرف لاتین و 10 عدد (0، 1، ... و 9) و اینکه تکرار حروف و اعداد مجاز است؛ جواب به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$26*26*10*10*10*10*10=67600000$$

ب) بند الف) را با فرض اینکه هیچ دو حرف یا دو عددی نباید در یک نمره تکرار شود، پاسخ دهید.

$$26*25*10*9*8*7*6=19656000$$

2. وقتی که تاسی را چهار مرتبه پرتاب می‌کنیم چند دنباله از نتایج ممکن حاصل می‌شود؟ برای مثال نتیجه 3، 4، 3 و 1 حاصل شده است هرگاه نتیجه اولین پرتاب 3، دومین پرتاب 4، سومین پرتاب 3 و پرتاب چهارم برابر با 1 است.

در پرتاب هر تاس 6 حالت حاصل می‌شود و با توجه به اینکه باید هر 4 تاس را پرتاب کنیم در نتیجه از اصل ضرب استفاده می‌شود و بنابراین $6^4=1296$ حالت بدست می‌آید.

3. 20 کارگر را برای 20 شغل مختلف در نظر گرفته‌ایم. اگر به هر کارگر یک شغل را بتوان اختصاص داد به چند حالت اختصاص شغلها به کارگران امکان‌پذیر است؟

$$20!$$

4. چهار فرد A، B، C و D یک گروه موسیقی مرکب از 4 وسیله موسیقی را تشکیل داده‌اند. اگر هر کدام بتوانند هر چهار وسیله را بنوازند، چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟ در صورتی که فرد A و فرد B بتوانند هر 4 وسیله را بنوازند ولی فرد C و فرد D هر کدام بتوانند پیانو و طبل بنوازند آنگاه چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟

نمی‌دارد بنابراین وجود نیت‌ی محدودی‌نکه هین قسمت با توجه به ای در 4! حالت وجود دارد. با توجه به اینکه فرد C و D تنها قادر به نواختن دو وسیله (پیانو و طبل) می‌باشند بنابراین لازم است ابتدا تکلیف آنها را مشخص کنیم که برای این امر $2*1=2$ حالت وجود دارد؛ حال باید تکلیف A و B را مشخص کنیم با توجه به اینکه تنها دو وسیله دیگر باقی مانده است بنابراین $2*1=2$ حالت نیز برای آنها وجود دارد و در نتیجه با توجه به اصل ضرب $2*2=4$ حالت وجود دارد.

5. سالهاست که کد بین شهری در آمریکا و کانادا از سه عدد تشکیل شده است که عدد اول آن بین 2 و 9، عدد دوم آن 0 یا 1 و عدد سوم آن هر عددی بین 1 و 9 است. چند کد بین شهری تلفن می‌تواند وجود داشته باشد؟ چند تا از کدها با عدد 4 شروع شده‌اند.

با توجه به اصل ضرب $8*2*9=144$ کد بین شهری تلفن وجود دارد. حال اگر کدها با عدد 4 شروع شوند بنابراین $1*2*9=18$ کد بین شهری تلفن وجود دارد.

6. یک سرود معروف کودکان دارای اشعار زیر است:

همین طور که در حال رفتن به کودکان بودم،

مردی را با هفت فرزند ملاقات کردم،

هر فرزند 7 ساک دستی داشت،

در هر ساک 7 گربه بود،

هر گربه 7 بچه گربه داشت.

چند بچه گربه توسط کودک دیده شده است؟

با توجه به اصل ضرب $7*7*7*7=2401$ بچه گربه توسط کودک دیده شده است.

7. الف) به چند طریق 3 پسر بچه و 3 دختر بچه می‌توانند در یک ردیف بنشینند؟

ب) به چند طریق 3 پسر بچه و 3 دختر بچه می‌توانند در یک ردیف بنشینند اگر لازم باشد پسر بچه‌ها پهلوئ هم و دختر بچه‌ها نیز پهلوئ هم باشند؟

ج) پاسخ بند الف) وقتی که فقط لازم باشد پسر بچه‌ها پهلوئ هم بنشینند چیست؟

د) پاسخ بند الف) وقتی که بنا باشد افراد همجنس پهلوئ هم بنشینند چیست؟

الف) با توجه به اینکه هیچ شرطی وجود ندارد بنابراین 6! جواب مورد نظر است.

ب) چون لازم است پسرها کنار هم باشند بنابراین 3! حالت و برای دخترها نیز 3! حالت به وجود می‌آید؛ حال با توجه به اینکه پسرها و دخترها نیز می‌توانند جایگشت داشته باشند (پسرها در سمت چپ، دخترها در سمت راست و بالعکس) بنابراین در این حالت نیز 2! حالت وجود دارد که با توجه به اصل ضرب در مجموع $2!*3!*3!=72$ حالت وجود دارد.

آنالیز ترکیباتی

(ج) چون لازم است پسرها کنار هم باشند بنابراین 3! حالت برای این امر وجود دارد و حال با در نظر گرفتن پسرها به عنوان یک شخص و 3 دختر 4! حالت به وجود می آید بنابراین $4! * 3! = 144$ حالت وجود دارد.

(د) چون لازم است افراد همجنس پهلوی هم نباشند بنابراین باید در کنار هر دختر یک پسر قرار گیرد؛ حال اگر اولین نفر دختر باشد (دختر، پسر، دختر، پسر، دختر، پسر) 36 حالت وجود دارد $1 * 2 * 2 * 3 * 3 = 36$ و اگر اولین نفر پسر باشد باز هم 36 حالت به وجود می آید که با توجه به اصل جمع در مجموع 72 حالت نتیجه می شود.
8. چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه های زیر می توان تهیه نمود؟

(الف) FLUKE (ب) PROPOSE (ج) MISSISSIPPI (د) ARRANGE
(الف) $5! = 120$ (ب) $2! * 2! = 4$ (ج) $4! * 4! * 2! = 34650$ (د) $2! * 2! = 4$

7!

9. کودکی 12 مکعب دارد که 6 تای آنها سیاه، 4 تا قرمز، یکی سفید و یکی آبی است. اگر او بخواهد مکعبها را در یک ردیف قرار دهد چند ترتیب متفاوت امکان پذیر است؟

$$\frac{12!}{4!6!} = 27720$$

10. به چند طریق 8 نفر می توانند در یک ردیف بنشینند اگر

(الف) هیچ محدودیتی در نشستن آنها وجود نداشته باشد.

(ب) فرد A و فرد B پهلوی هم بنشینند.

(ج) 4 مرد و 4 زن باشند و هیچ دو مرد یا دو زنی نتوانند پهلوی هم بنشینند.

(د) 5 نفر از آنها مرد باشند و بخواهند پهلوی هم بنشینند.

(ه) 4 زوج باشند و باید هر زوج پهلوی هم بنشینند.

(الف) 8!

(ب) اگر فرد A و B را پهلوی هم قرار دهیم 2! حالت به وجود می آید و حال با در نظر گرفتن این دو نفر به عنوان یک نفر و با توجه به وجود 6 نفر دیگر باید این 7 نفر در کنار یکدیگر قرار بگیرند که با توجه به اصول شمارش 7! حالت وجود دارد و بنابراین با توجه به اصل ضرب $2! * 7! = 10080$ حالت وجود دارد.

(ج) مانند قسمت (د) سوال 7 حل می شود و بنابراین $576 + 576 = 1152$ حالت وجود دارد.

(د) مانند قسمت (ب) همین سوال حل می شود و بنابراین $5! * 4! = 2880$ حالت وجود دارد.

(ه) برای هر زوج 2! حالت وجود دارد و 4 زوج مختلف داریم بنابراین $4! * 2! * 2! * 2! * 2! = 384$ حالت پیش می آید.

11. به چند طریق می توان 3 کتاب داستان، 2 کتاب ریاضی و یک کتاب شیمی را در یک قفسه کتاب به ترتیب پهلوی هم قرار داد به طوری که

(الف) کتابها بدون هیچ محدودیتی چیده شوند.

(ب) کتابهای ریاضی پهلوی هم و کتابهای داستان نیز پهلوی هم باشند.

(ج) کتابهای داستان پهلوی هم باشند و سایر کتابها محدودیتی نداشته باشند.

(الف) $6! = 720$

(ب) مانند قسمت (ه) سوال 10 حل می شود بنابراین $3! * 3! * 2! = 72$ حالت وجود دارد.

(ج) مانند قسمت قبل است و بنابراین $3! * 4! = 144$ حالت وجود دارد.

12. 5 جایزه جداگانه (بورس تحصیلی و...) به گروهی منتخب از دانشجویان یک کلاس 30 نفری اهداء می شود. این کار به چند طریق امکان پذیر است اگر

(الف) یک دانشجو بتواند به هر تعداد جایزه بگیرد؟

(ب) یک دانشجو بتواند حداکثر یک جایزه بگیرد؟

(الف) با توجه به اینکه یک دانشجو می تواند به هر تعداد جایزه بگیرد بنابراین جایزه اول را می توان به 30 نفر داد و به همین ترتیب جایزه پنجم را نیز می توان به 30 نفر اهدا کرد بنابراین $(30)^5$ حالت وجود دارد.

(ب) با توجه به اینکه یک دانشجو می تواند حداکثر یک جایزه بگیرد بنابراین $26 * 27 * 28 * 29 * 30$ حالت وجود دارد.

13. یک گروه 20 نفری را در نظر بگیرید. اگر هر فرد بخواهد با افراد دیگر دست بدهد به چند طریق دست دادن امکان پذیر است؟

نفر اول به 19 حالت می تواند دست بدهد و نفر دوم با توجه به اینکه دیگر لازم نیست با نفر اول دست بدهد 18 حالت برای دست دادن دارد و به همین ترتیب نفر نوزدهم فقط 1 حالت برای دست دادن دارد و برای نفر بیستم 0 حالت وجود دارد بنابراین با استفاده از اصل جمع $19 + 18 + \dots + 1 + 0 = 190$ حالت وجود دارد.

*.14

مبانی احتمال

15. در یک تیم ورزشی 22 نفره، 10 دانشجوی سال اول و 12 دانشجوی سال دوم شرکت می‌کنند. اگر 5 دانشجوی سال اول و 5 دانشجوی سال دوم را برای تشکیل گروه‌هایی 2 نفره که هر گروه شامل یک دانشجوی سال اول و یک دانشجوی سال دوم باشد انتخاب کنیم، به چند حالت این انتخاب امکان‌پذیر است؟

$$\binom{10}{5} \binom{12}{5} = 199584$$

16. دانشجوی می‌خواهد 2 کتاب از مجموعه کتاب‌های خود را که شامل 6 کتاب ریاضی، 7 کتاب فیزیک و 4 کتاب اقتصاد است بفروشد. او چند انتخاب ممکن دارد اگر
(الف) هر دو کتاب از یک موضوع انتخاب شوند.
(ب) کتاب‌ها از موضوع‌های متفاوتی باشند.

(الف) با توجه به اینکه باید هر دو کتاب از یک موضوع انتخاب شوند بنابراین یا هر دو ریاضی، یا هر دو فیزیک

و یا هر دو اقتصاد هستند و با توجه به اینکه ترتیب اهمیت ندارد و با استفاده از اصل جمع $42 = \binom{4}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2}$ حالت وجود دارد.

(ب) برای اینکه کتابها از موضوعات مختلفی باشند سه حالت به وجود می‌آید یا یکی از کتابها ریاضی و دیگری فیزیک یا یکی از کتابها ریاضی و دیگری اقتصاد یا یکی از کتابها فیزیک و دیگری اقتصاد است بنابراین

$$94 = \binom{4}{1} \binom{7}{1} + \binom{4}{1} \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \binom{7}{1}$$

حالت وجود دارد.

17. 7 جایزه را می‌خواهیم بین 10 دانش‌آموز تقسیم نماییم. اگر هیچ دانش‌آموزی بیش از یک جایزه نگیرد، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

با توجه به اینکه تکرار مجاز نیست بنابراین $4 * 5 * \dots * 9 * 10$ حالت وجود دارد.
18. شورایی متشکل از 7 نفر که 2 نفر آنها جمهوری‌خواه، 2 نفر دمکرات و 3 نفر مستقل هستند را از یک گروه متشکل از 5 جمهوری‌خواه، 6 دمکرات و 4 مستقل انتخاب می‌کنیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\binom{4}{3} \binom{6}{2} \binom{5}{2} = 600$$

با توجه به اصل ضرب حالت وجود دارد.

19. از گروهی متشکل از 8 زن و 6 مرد شورایی مرکب از 3 زن و 3 مرد باید تشکیل شود. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است هرگاه

(الف) 2 نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

(ب) 2 نفر از زن‌ها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

(ج) یکی از مردها و یکی از زن‌ها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

(الف) با توجه به اینکه 2 نفر از مردها نمی‌خواهند با هم انتخاب شوند بنابراین دو حالت به وجود می‌آید یا یکی از مردها انتخاب می‌شود و دیگری انتخاب نمی‌شود یا هیچ‌کدام از آنها انتخاب نمی‌شوند بنابراین

$$896 = \binom{8}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{1} + \binom{8}{3} \binom{4}{3} \binom{2}{0}$$

حالت وجود دارد.

(ب) مانند قسمت (الف) در این مورد نیز 2 حالت به وجود می‌آید و بنابراین

$$1000 = \binom{6}{3} \binom{6}{2} \binom{2}{1} + \binom{6}{3} \binom{6}{3} \binom{2}{0}$$

حالت وجود دارد.

(ج) با توجه به اینکه یکی از مردها و یکی از زن‌ها نمی‌خواهند با هم انتخاب شوند بنابراین سه حالت به وجود می‌آید یا آن مرد انتخاب می‌شود و آن زن انتخاب نمی‌شود یا آن زن انتخاب می‌شود و آن مرد انتخاب نمی‌شود یا هیچ‌کدام

$$910 = \binom{7}{3} \binom{5}{2} \binom{7}{3} + \binom{7}{2} \binom{5}{3} \binom{7}{2} + \binom{7}{3} \binom{5}{3} \binom{7}{3}$$

حالت وجود دارد.

20. فردی 8 دوست دارد که می‌خواهد 5 نفر آن‌ها را به یک میهمانی دعوت کند. چند انتخاب وجود دارد اگر

(الف) دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم شرکت کنند؟

(ب) دو نفر از دوستان وی در صورتی که با هم دعوت شوند در میهمانی شرکت کنند؟

$$36 = \binom{6}{4} \binom{2}{1} + \binom{6}{5} \binom{2}{0}$$

(الف) مانند قسمت (الف) سوال 19 می‌باشد بنابراین حالت وجود دارد.

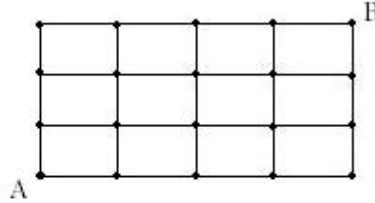
آنالیز ترکیباتی

(ب) با توجه به اینکه دو نفر از دوستان وی در صورتی که با هم دعوت شوند در میهمانی شرکت می‌کنند بنابراین

$$\binom{2}{2} \binom{6}{3} + \binom{2}{0} \binom{6}{5} = 26$$

دو حالت وجود دارد یا باید هر دو را دعوت کنیم یا اینکه هیچکدام را دعوت نکنیم بنابراین

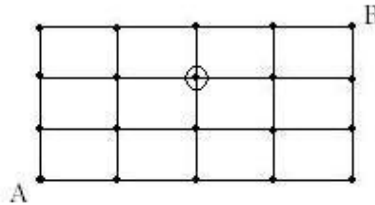
حالت وجود دارد.
21. مجموعه‌ای از نقاط را به صورت شکل زیر در نظر بگیرید. فرض کنید از نقطه‌ی A شروع کرده و در هر حرکت می‌توانید به طرف بالا یا به طرف راست یک قدم بردارید. اگر این حرکت ادامه یابد تا به نقطه‌ی B برسید در این صورت چند مسیر از A به B امکان‌پذیر است؟
راهنمایی: توجه کنید که برای رفتن از نقطه‌ی A به B باید 4 قدم به طرف راست و 3 قدم به طرف بالا برداشته شود.



با توجه به اینکه باید 4 قدم به طرف راست و 3 قدم به طرف بالا برداشته شود بنابراین باید 7 قدم برداشته شود و

$$\text{در نتیجه } 35 = \frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{4,3} \text{ انتخاب وجود دارد.}$$

22. در مسأله‌ی 21 چند مسیر از A به B وجود دارد در صورتی که مسیر از نقطه‌ی مشخص شده در شکل زیر بگذرد؟



برای رسیدن به نقطه مورد نظر باید 2 حرکت به سمت راست و 2 حرکت به طرف بالا داشته باشیم بنابراین

$$\binom{4}{2,2} = 6$$

طرف بالا داشته باشیم بنابراین $\binom{3}{2,1} = 3$ انتخاب نیز برای این قسمت وجود دارد و با توجه به اصل ضرب در

$$\text{مجموع } 6 * 3 = 18 \text{ انتخاب وجود دارد.}$$

23. یک آزمایشگاه روانسنجی از 3 قسمت که در هر قسمت 2 تخت وجود دارد تشکیل شده است. اگر 3 جفت دوقلو یکسان را بخواهیم در این مرکز بستری کنیم به طوری که هر جفت دوقلو در یک قسمت روی تخت‌های متفاوت بستری شوند. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

ابتد باید هر جفت را در یک قسمت قرار دهیم که این امر در 3! حالت امکان‌پذیر است حال باید هر جفت را بر روی دو تخت قرار دهیم که این امر در 2! حالت امکان‌پذیر است (زیرا دو قلوها از هم متمایز هستند) بنابراین کل حالات موجود برابر با $48 = 3! * 2! * 2! * 2!$ است.

24. عبارت $(3x^2 + y)^5$ را بسط دهید.

$$(3x^2 + y)^5 = \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} (3x^2)^i y^{5-i}$$

* 25

26. عبارت $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$ را بسط دهید.

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 4}} \binom{4}{n_1, n_2, n_3} (x_1)^{n_1} (2x_2)^{n_2} (3x_3)^{n_3}$$

مبانی احتمال

27. به چند طریق می‌توان 12 نفر را در سه شورایی متفاوت با تعداد اعضای 3، 4 و 5 تقسیم نمود. در اینجا قصد داریم 12 نفر را به سه زیر مجموعه 3، 4 و 5 نفری تقسیم کنیم و بنابراین

$$\binom{12}{3,4,5} = \frac{12!}{4!3!5!} = 27720$$

حالت وجود دارد.

28. اگر بخواهیم 8 معلم را بین 4 مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود آنگاه به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

با توجه به اینکه هیچ محدودیتی وجود ندارد بنابراین هر معلم 4 حق انتخاب دارد و در نتیجه $4^8 = 65536$

انتخاب وجود دارد. چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود در نتیجه $\binom{8}{2,2,2,2} = 2520$ انتخاب

وجود دارد.

29. 10 وزنه بردار در یک مسابقه شرکت دارند که 3 نفر آنها آمریکایی، 4 نفر روسی، 2 نفر چینی و یک نفر کانادایی هستند. اگر امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار ثبت شود چند نتیجه‌ی ممکن از نظر امتیاز می‌تواند وجود داشته باشد؟ چنانچه آمریکا یک وزنه بردار در سه نفر اول و 2 وزنه بردار در سه نفر آخر داشته باشد آنگاه نتایج ممکن به چند صورت خواهد بود؟

با توجه به اینکه امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار ثبت می‌شود در نتیجه بین وزن برداران یک کشور

تفاوتی وجود ندارد و در نتیجه $\frac{10!}{3!4!2!!!} = 12600$ حالت متمایز وجود دارد. یکی از سه وزن بردار آمریکایی در بین

سه نفر اول قرار می‌گیرد که این 3 حالت را شامل می‌شود (اول یا دوم یا سوم) و برای دو وزن بردار آمریکایی باقیمانده اولی 3 حالت دارد و دومی دو حالت ولی چون ترتیب مهم نیست در نتیجه $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ حالت وجود دارد و

برای 7 وزنه بردار باقیمانده $\frac{7!}{2!4!!!} = 105$ حالت وجود دارد و با توجه به اصل ضرب $3 * 3 * 105 = 945$ حالت

وجود دارد.

30. نمایندگان 10 کشور از جمله روسیه، فرانسه، انگلیس و آمریکا باید در یک ردیف قرار گیرند. چنانچه نمایندگان فرانسه و انگلیس بخواهند پهلوئی هم باشند و نمایندگان روسیه و آمریکا بخواهند پهلوئی هم نباشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

تعداد حالاتی که انگلیس و فرانسه کنار هم قرار می‌گیرند برابر با $2! * 9! = 725760$ و تعداد حالاتی که انگلیس و فرانسه کنار هم هستند و آمریکا و روسیه نیز کنار هم هستند برابر با $2! * 2! * 8! = 161280$ می‌باشد بنابراین تعداد حالاتی که انگلیس و فرانسه کنار هم قرار می‌گیرند ولی آمریکا و روسیه کنار هم نباشند برابر با $564480 = 725760 - 161280$ است.

31*. اگر بخواهیم 8 تخته سیاه یکسان را بین 4 مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد حداقل یک تخته سیاه داده شود در این صورت به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

$$\binom{8+3}{3} = 165$$

$$\binom{4+3}{3} = 35$$

32*. یک آسانسور از طبقه‌ی همکف با 8 مسافر (بدون متصدی آسانسور) حرکت کرده و تا طبقه ششم همه را پیاده می‌کند. اگر مسافران از نظر متصدی آسانسور یکسان باشند به چند طریق مختلف او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟ اگر 5 نفر از مسافران مرد و 3 نفر زن باشند و متصدی آسانسور بتواند مرد و زن را تشخیص دهد آنگاه به چند طریق ممکن شاهد پیاده شدن مسافران خواهد بود؟

$$\binom{13}{5} = 1287$$

برای مردها $\binom{10}{5} = 252$ حالت و برای زنها $\binom{8}{5} = 56$ حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب 14112 حالت را

شاهد است.

6

آنالیز ترکیباتی

*33. می‌خواهیم 20 میلیون تومان را در 4 فعالیت اقتصادی سرمایه‌گذاری کنیم. هر سرمایه‌گذاری باید مضربی از یک میلیون تومان بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیتها سرمایه‌گذاری کنیم لازم است حداقل سرمایه‌گذاری 2، 2، 3 و 4 میلیون تومان در هر فعالیت انجام گیرد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است اگر

(الف) بخواهیم در همهی فعالیتها سرمایه‌گذاری کنیم؟

(ب) بخواهیم در حداقل 3 فعالیت سرمایه‌گذاری کنیم؟

(الف) مسأله را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم $(x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) + (x_4 - 4) = 20$ و

بنابراین $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = 220$ حالت وجود دارد.

(ب) چون حداقل باید در سه معامله سرمایه‌گذاری کنیم بنابراین حالتهاي زیر رخ می‌دهند:

- I. در هر 4 معامله سرمایه‌گذاری کنیم. (220 حالت)
 - II. در سه معادله x_3, x_2, x_1 سرمایه‌گذاری کنیم. (105 حالت)
 - III. در سه معادله x_4, x_2, x_1 سرمایه‌گذاری کنیم. (91 حالت)
 - IV. در سه معادله x_4, x_3, x_1 سرمایه‌گذاری کنیم. (78 حالت)
 - V. در سه معادله x_4, x_3, x_2 سرمایه‌گذاری کنیم. (78 حالت)
- و طبق اصل جمع تعداد حالات موجود برابر با 572 می‌باشد.